Método de Spline

1. Planteo del problema a partir de las condiciones

El trazador cúbico o *spline* es un conjunto de polinomios de tercer grado que se genera a partir de un conjunto de puntos y, para calcularlo, debe cumplen ciertas condiciones:

I Los polinomios pasan por los puntos: $P_k(x_k) = f(x_k)$ con $k = \{0, 1, \ldots\}$ y $P_{n-1}(x_n) = f(x_n)$.

II Continuidad en los nodos interiores: $P_k(x_{k+1}) = P_{k+1}(x_{k+1})$ con $k = \{0, 1, \ldots\}$.

III Derivabilidad en los nodos interiores: $P_k{}'(x_{k+1}) = P_{k+1}{}'(x_{k+1})$ con $k = \{0, 1, \ldots\}$.

IV Continuidad de la primera derivada para conservar la concavidad en la vecindad de los nodos interiores: $P_k{}''(x_{k+1}) = P_{k+1}{}''(x_{k+1})$ con $k = \{0, 1, \ldots\}$.

V Condición de frontera natural ($P_0{}''(x_0) = 0$ y $P_{n-1}{}''(x_n) = 0$) o frontera sujeta ($P_0{}'(x_0) = f'(x_0)$ y $P_{n-1}{}'(x_n) = f'(x_n)$)

Cada polinomio para un nodo k se define como $P_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$. A continuación se presenta un ejemplo para una serie de puntos. Se desea hallar el conjunto de polinomios cúbicos que cumplan con las condiciones mencionadas:

i	x	y
0	2	4
1	6	4
2	7	6
3	12	7

Cuadro 1: Puntos dados

Aplicar todas las condiciones generará un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas serán los coeficientes de los n polinomios a encontrar con n igual a cantidad de puntos. En este caso, hay 4 puntos dados, entonces, los polinomios a plantear serán 4. Es importante notar que los polinomios de interés son todos salvo el último cuyos coeficientes no podrán ser calculados en su totalidad por la falta de datos. Planteándolos genéricamente se tiene:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= a_0 + b_0(x-2) + c_0(x-2)^2 + d_0(x-2)^3 \\
P_1(x) &= a_1 + b_1(x-6) + c_1(x-6)^2 + d_1(x-6)^3 \\
P_2(x) &= a_2 + b_2(x-7) + c_2(x-7)^2 + d_2(x-7)^3 \\
P_3(x) &= a_3 + b_3(x-12) + c_3(x-12)^2 + d_3(x-12)^3
\end{aligned} \tag{1}
$$

Plantear la primera condición consiste en que el polinomio en el punto sea igual a la función en el punto. Dada la forma en la que está escrita el polinomio, es evidente que se cancelarán todos los términos salvo a para cada polinomio. De esta forma, se obtienen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
P_0(2) &= \mathbf{a_0} = \mathbf{f(2)} = \mathbf{4} \\
P_1(6) &= \mathbf{a_1} = \mathbf{f(6)} = \mathbf{4} \\
P_2(7) &= \mathbf{a_2} = \mathbf{f(7)} = \mathbf{6} \\
P_2(12) &= 6 + b_2(12-7) + c_2(12-7)^2 + d_2(12-7)^3 = f(12) \\
&= \mathbf{5b_2 + 25c_2 + 125d_2 = 1}
\end{aligned}
$$

Siguiendo con la siguiente condición, se deben establecer igualdades en los nodos interiores. Éstos son dos, por lo tanto se obtienen dos ecuaciones más:

$$\begin{aligned} P_0(6) &= P_1(6) \\ a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 + d_0(x_1 - x_0)^3 &= a_1 \\ 4 + b_0(6-2) + c_0(6-2)^2 + d_0(6-2)^3 &= 4 \\ \mathbf{4b_0 + 16c_0 + 64d_0} &\mathbf{= 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(7) &= P_2(7) \\ a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 + d_1(x_2 - x_1)^3 &= a_2 \\ 4 + b_1(7-6) + c_1(7-6)^2 + d_1(7-6)^3 &= 6 \\ \mathbf{b_1 + c_1 + d_1} &\mathbf{= 2} \end{aligned}$$

Lo mismo que en el caso anterior pero en las derivadas. Por lo tanto, primero resulta conveniente encontrar una expresión general para las derivadas de los polinomios:

$$P'_k(x) = b_k + 2c_k(x - x_k) + 3d_k(x - x_k)^2$$

Especializando en los nodos interiores:

$$\begin{aligned} P'_0(x_1) &= P'_1(x_1) \\ b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) + 3d_0(x_1 - x_0)^2 &= b_1 \\ b_0 + 2c_0(6-2) + 3d_0(6-2)^2 &= b_1 \\ \mathbf{b_0 + 8c_0 + 48d_0 - b_1} &\mathbf{= 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_1(x_2) &= P'_2(x_2) \\ b_1 + 2c_1(x_2 - x_1) + 3d_0(x_2 - x_1)^2 &= b_2 \\ b_1 + 2c_1(7-6) + 3d_0(7-6)^2 &= b_2 \\ \mathbf{b_1 + 2c_1 + 3d_1 - b_2} &\mathbf{= 0} \end{aligned}$$

Análogamente, debe analizarse la derivada segunda en los nodos internos. Nuevamente se calcula la derivada segunda del polinomio:

$$P''_k(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_k)$$

Especializando en los nodos interiores:

$$\begin{aligned} P''_0(x_1) &= P''_1(x_1) \\ 2c_0 + 6d_0(x_1 - x_0) &= 2c_1 \\ 2c_0 + 6d_0(6-2) &= 2c_1 \\ \mathbf{2c_0 + 24d_0 - 2c_1} &\mathbf{= 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P''_1(x_2) &= P''_2(x_2) \\ 2c_1 + 6d_1(x_2 - x_1) &= 2c_2 \\ 2c_1 + 6d_1(7-6) &= 2c_2 \\ \mathbf{2c_1 + 6d_1 - 2c_2} &\mathbf{= 0} \end{aligned}$$

Hasta el momento se tienen 10 ecuaciones con 12 incógnitas (sin contar el polinomio P_3 que no interesa calcular) por lo que resta aplicar la condición de frontera natural que produce las dos ecuaciones faltantes:

$$\begin{aligned} P_0''(x_0) &= 0 \\ 2c_0 &= 0 \\ \mathbf{c_0} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2''(x_3) &= 0 \\ 2c_2 + 6d_2(x_3 - x_2) &= 0 \\ \mathbf{2c_2} + \mathbf{30d_2} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Con las expresiones obtenidas, se reorganizarán las igualdades en valores ya resueltos y ecuaciones por resolver. Por lo tanto se conoce que $a_0 = 4$, $a_1 = 4$, $a_2 = 6$ y $c_0 = 0$. De las doce igualdades, restan ocho por resolver. Se armará un sistema de ecuaciones cuya resolución propone resolverse utilizando MATLAB o cualquier método visto anteriormente:

$$\begin{bmatrix} 5 & 25 & 125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 48 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ b_0 \\ d_0 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

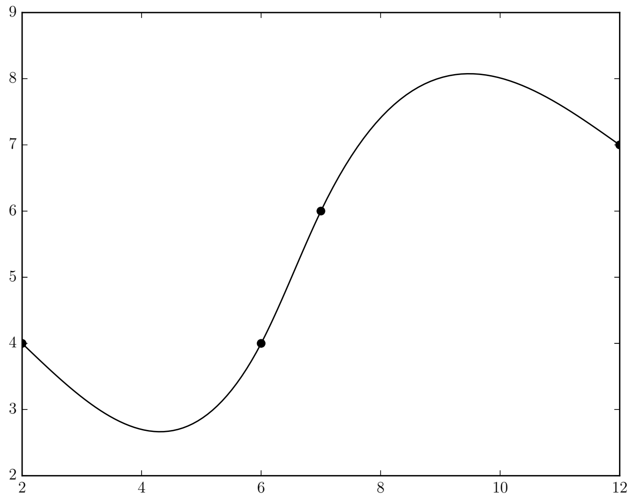
Resolviendo el sistema, se obtienen los coeficientes:

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ b_0 \\ d_0 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}8807 \\ -0{,}5042 \\ 0{,}0336 \\ -0{,}8672 \\ 0{,}0542 \\ 1{,}7345 \\ 0{,}6504 \\ -0{,}3849 \end{bmatrix}$$

Reescribiendo los polinomios con sus respectivos coeficientes se tiene el conjunto que forma el trazador cúbico:

$$\begin{cases} P_0(x) = 4 - 0{,}8672(x-2) + 0{,}0592(x-2)^3 & 2 \leq x < 6 \\ P_1(x) = 4 + 1{,}7345(x-6) + 0{,}6504(x-6)^2 - 0{,}3849(x-6)^3 & 6 \leq x < 7 \\ P_2(x) = 6 + 1{,}8807(x-7) - 0{,}5042(x-7)^2 + 0{,}0336(x-7)^3 & 7 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

Finalmente se debe verificar que los polinomios pasen por la función especializada en los puntos y que sea suave en toda su trayectoria. Para esto, se realizará un gráfico:



2. Planteo directo desde el sistema de ecuaciones

Una forma general de resolver las ecuaciones anteriores, es aplicando un sistema de ecuaciones conocido a partir de un despeje genérico de las condiciones. A partir de esto, se llega a un sistema donde se hallan los valores de c_k y, en función de ellos, los valores de b_k y d_k. Las expresiones generales son las siguientes:

$$a_k = f(x_k)$$

$$b_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 \; \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \; \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$$

Donde $h_k = x_{k+1} - x_k$. A partir de esta información, es posible hallar todos los coeficientes de los polinomios de forma directa. En primer lugar, se elabora una tabla con los valores de x e y, a partir de los cuales se puede obtener h_k y a_k:

i	x	y	h
0	2	4	4
1	6	4	1
2	7	6	5
3	12	7	-

Conociendo los valores de a_k, que son iguales a y_k como se vio anteriormente, se obtienen, primero, los valores de c_k:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2(4+1) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(1+5) & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{1}(6-4) - \frac{3}{4}(4-4) \\ \frac{3}{5}(7-6) - \frac{3}{1}(6-4) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -5,4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}6504 \\ -0{,}5042 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cabe aclarar que c_3^* corresponde al coeficiente del polinomio que no se calcula, por lo tanto, este valor no se usará. Luego, se calculan los valores correspondientes de b y d usando las expresiones anteriores:

$$b_0 = -0{,}8672$$
$$b_1 = 1{,}7345$$
$$b_2 = 1{,}8807$$

$$d_0 = 0{,}0542$$
$$d_1 = -0{,}3849$$
$$d_2 = 0{,}0336$$

Finalmente, se verifica que son exactamente los mismos valores calculados anteriormente.