Temas: *Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales. Métodos directos: Eliminación Gaussiana, factorización LU. Normas Vectoriales y Matriciales. Sistemas mal condicionados. Métodos indirectos: Método de Jacobi, Método de Gauss-Seidel.*

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A*x} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

calcule **manualmente** el producto $\mathbf{A*x}$ para los vectores listados abajo, e indique cual de ellos es solución del sistema $\mathbf{A*x} = \mathbf{b}$:

a) $\mathbf{x} = [2 \quad -5 \quad 4]^t$
b) $\mathbf{x} = [2/3 \quad 5 \quad -4]^t$
c) $\mathbf{x} = [2 \quad 1/2 \quad 3]^t$

2. Para el ejercicio anterior, calcule $\mathbf{x=A \backslash b}$ (en Matlab) y compare con el resultado obtenido. Calcule el residuo **A*x-b**.

3. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A*x} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre la solución usando el comando Matlab $\mathbf{x} = \mathbf{A \backslash b}$.
b) Calcule el residuo **A*x-b**.
c) ¿ Qué conclusiones saca de los resultados obtenidos ?

4. Calcule **manualmente** la solución del siguiente sistema $\mathbf{A*x} = \mathbf{b}$ usando sustitución regresiva:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

5. Aplique **manualmente** eliminación Gaussiana al sistema $\mathbf{A*x} = \mathbf{b}$ (abajo) para convertirlo en un sistema diagonal inferior $\mathbf{U*x} = \mathbf{z'}$. Entonces resuelva **manualmente** el sistema diagonal usando sustitución regresiva. Verifique que la solución encontrada para $\mathbf{U*x} = \mathbf{z}$ es también solución de $\mathbf{A*x} = \mathbf{b}$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6. Calcule (usando la función **lu** del Matlab) las matrices **L** y **U** para el sistema del ejercicio 5. Use esas matrices para resolver el sistema siguiendo los siguientes pasos:

   a) Calcule **z** como solución de **L*z = b**

   b) Calcule **x** como solución de **U*x = z**

   Verifique que **x** es solución de **A*x = b**

7. Calcule (usando la función **lu** del Matlab) las matrices **L**, **U** y **P** correspondientes a la factorización de las matrices

   a) H = hilb(5)

   b) R = rand(5)

8. Una mezcla de cinco componentes en solución proporciona los siguientes datos espectrofotométricos.

Longitud de onda	**Absorbancia del componente**					**Absorbancia Total**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
1	98	9	2	1	0.5	0.1100
2	11	118	9	4	0.88	0.2235
3	27	27	85	8	2	0.2800
4	1	3	17	142	25	0.3000
5	2	4	7	17	118	0.1400

   Considerando que se cumple la *ley de Beer*, podemos decir que la absorbancia total está dada por:

$$A_{TOT,\ i} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{i,j} * C_j$$

   Plantee el sistema de ecuaciones lineales y determine (usando Matlab) las concentraciones de cada componente.

9. Dado el sistema de ecuaciones lineales de los ejercicios 1, 3, 4 y 5

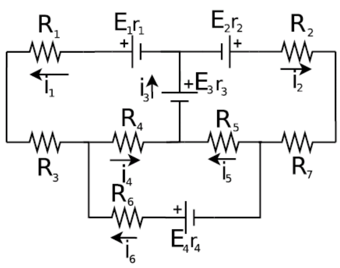
   a) Calcule el *determinante* de **A**.

   b) Calcule la *inversa* de **A**.

   c) Calcule el *número de condición* de **A**.

   d) ¿ Qué conclusiones saca de los resultados obtenidos ?

10. Dado el siguiente circuito eléctrico, plantee el mínimo sistema de ecuaciones lineales y calcule los valores de todas las corrientes.



i	1	2	3	4	5	6	7
$E_i(V)$	12	10	24	12	-	-	-
$r_i(\Omega)$	0.1	0.5	0.2	0.5	-	-	-
$R_i(\Omega)$	25	40	16	20	9	4	20

11. *a*) Puede estimar la cota de error relativo de la solución obtenida en el ejercicio 4, si los valores de la matriz **A** varian en un 10 %?

    b) Puede hacerlo si los valores de **A** varian en un 1 %?

    c) Estime la cota de error relativo de la solución obtenida en el ejercicio 4, si los valores de la matriz **A** varian en un 1 %. Verifique el cumplimiento de la cota aplicando variaciones aleatorias (Usar $M = A + A. * 0.01. * rand(3)$), resolviendo (con Matlab) el sistema **M*z = b** y calculando el error.

12. Para el sistema **A*x=b**:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

    a) Calcule la matrix **B** tal que una solución de **x = Bx + c** es tambien solución de **A*x=b** (despejar x_i de las diagonales).

    b) La matrix **B** y el vector **c** pueden obtenerse mediante **B = - inv(D)*(L+U)** y **c =inv(D)*b**, donde **D** es la parte diagonal de **A**, **U** es la parte diagonal estrictamente superior de **A**, y **L** es la parte diagonal estrictamente inferior de **A** (**No** estan relacionados a la descomposición LU). Calcule **B** y **c** usando estas ecuaciones y compare con el valor de **B** calculado en el item anterior.

    c) Calcule la norma de **B**

    d) Calcule el radio espectral de **B** (En Matlab : "re = max(abs(eig(B)))")

    e) Encuentre una solución $\mathbf{x_0}$ usando **x=A\b**.

    f) Aplique manualmente el método de Jacobi hasta 8 iteraciones (puede usar Matlab para realizar los calculos intermediarios)

    g) Aplique manualmente el método de Gauss-Seidel hasta 8 iteraciones (puede usar Matlab para realizar los calculos intermediarios)

    h) Para cada iteracción, calcule la norma del error $||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}||$ y del residuo $||\mathbf{A} * \mathbf{x} - \mathbf{b}||$.

    i) Compare la velocidad de convergencia de ambos métodos.

13. Considerar el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 15 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 16 \end{aligned}$$

a) Reorganice el sistema dado de tal manera que la matriz del sistema resultante sea EDD o lo más parecido a esta forma.

b) Obtenga paso a paso, con aritmética exacta, las matrices de iteración de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

c) Dé las fórmulas matriciales de iteración para ambos métodos.

d) Realice manualmente 5 iteraciones para ambos métodos, comenzando en [0 0 0] (puede usar Matlab para realizar los calculos intermediarios)

14. Programe en MATLAB el método de JACOBI. Aplique el método al problema de los ejercicios 12 y 13 para verificar su funcionamiento.

15. Programe en MATLAB el método de GAUSS SEIDEL. Aplique el método al problema de los ejercicios 12 y 13 para verificar su funcionamiento.

16. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales **A*x = b**:

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.4 & 0.0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -3.0 \\ 0.0 & 0.2 & 1.0 & 0.6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.77 \\ 0.32 \\ -2.0 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3.444 & 16100 & -9.1 \\ 1.9999 & 17.01 & 9.6 \\ 1.6 & 5.2 & 1.7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.156 & 4.102 & -2.3217 & 6 \\ -4.102 & 6 & 0 & 1.2 \\ -1 & -5.7012 & 1.2222 & 0 \\ 6.532 & 7 & 0 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 6.5931 \\ 3.4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5.8 & 3.2 & 11.24 \\ 4.3 & 3.4 & 9.625 \\ 2.5 & 5.2 & 9.625 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.24 \\ 17.325 \\ 17.325 \end{bmatrix}$$

a) Calcule la matrix **B** tal que una solución de **x = Bx + c** es tambien solución de **A*x=b**.

b) Calcule la norma de B

c) Calcule el radio espectral.

d) En base a los resultados obtenidos, determine cuáles convergerán hacia una solución única, por medio de JACOBI y GAUSS SEIDEL.

Nota: En todos los casos, reordene previamente el sistema de forma tal de obtener los mejores resultados.

17. Resuelva los sistemas del ejercicio anterior, en los casos en que sea posible, por el método de JACOBI, determinando la cantidad de iteraciones necesarias, partiendo del vector nulo, para obtener una solución con $||r||_M \leq 10^{-5}$.

18. Resuelva el ejercicio anterior por medio del método de GAUSS SEIDEL y compare la cantidad de iteraciones necesarias para obtener la misma precisión.

19. Dado el sistema no lineal

$$\begin{aligned} x^2 + y &= 2 \\ cos(x) + cos(y) &= z \\ x * y + z^2 &= 5 \end{aligned}$$

Defina una fórmula de iteración de punto fijo, y verifique si se cumplen las condiciones de convergencia en el punto inicial, considerando el punto inicial [x,y,z]=[0,0,0]. Realice 5 iteraciones.

20. Para los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

1

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ f_2(x,y) &= e^x + y - 1 = 0 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 - 2x - y + 0.5 = 0 \\ f_2(x,y) &= x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

(Obs para [2]: Para punto fijo, despejar x de $2x$ en la primera ecuación y despejar y en la segunda ecuación sumando y en ambos lados.)

3

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x - y + 1 = 0 \\ f_2(x,y) &= x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Hacer:

a) Hacer una gráfica que "ilustre" las soluciones reales que tiene el sistema y determinar los puntos iniciales punto apropiados *enteras* $X_0 = (x_0, y_0)$.

b) "Plantear" el problema como un problema de punto fijo y verificar las condiciones de convergencia para la forma utilizada.

c) Para una de las soluciones reales, usar aproximaciones iniciales *enteras* $X_0 = (x_0, y_0)$ y realizar todos los pasos necesarios para obtener las aproximaciones $X_1 = (x_1, y_1)$, ..., $X_5 = (x_5, y_5)$, utilizando los métodos de **Newton-Raphson** y **Punto Fijo** en **forma manual**.

d) En todos los casos, calcular el error absoluto de f_1 y f_2 ($|f_i(x,y) - 0|$).

21. Realice un programa en MATLAB que permita encontrar la solución aproximada de un sistema de ecuaciones no lineales por medio del método de Punto Fijo. Aplicarlo al ejercicio 20.

    a) Con ese programa, obtener una aproximación $X_k = (x_k, y_k)$, iterando hasta que $|X_k - X_{k-1}|_\infty < 10^{-3}$.

    b) Compare los resultados obtenidos con los que se obtienen al aplicar la función **fsolve** de MATLAB.

22. Realice un programa en MATLAB que permita encontrar la solución aproximada de un sistema de ecuaciones no lineales por medio del método de Newton-Raphson. Aplicarlo al ejercicio 20.

    a) Con ese programa, obtener una aproximación $X_k = (x_k, y_k)$, iterando hasta que $|X_k - X_{k-1}|_\infty < 10^{-3}$.

    b) Compare los resultados obtenidos con los que se obtienen al aplicar la función **fsolve** de MATLAB.