Métodos Numéricos

Cursada Segundo Cuatrimestre 2012

Guía de Trabajos Prácticos Nro. 5

Temas: *Interpolación polinomial simple. Interpolación de Lagrange. Polinomio interpolador de Newton. Interpolación polinomial segmentada (Spline). Ajuste de curvas. Regresión por mínimos cuadrados.*

1. A continuación se presenta una tabla de temperaturas de ebullición de la acetona (C_3H_6O) para diferentes presiones.

P (atm)	1	5	20	40
T (°C)	56.5	113.0	181.0	214.5

   a) Calcule los valores de temperatura de ebullición correspondientes a 2, 10 y 30 atmósferas por medio de interpolación lineal.

   b) Calcule los coeficientes del polinomio de interpolación $P_3(x)$ que pasa por todos los puntos dados en dicha tabla, a partir del planteo de un sistema de ecuaciones lineales.

   c) Calcule los valores de temperatura de ebullición correspondientes a 2, 10 y 30 atmósferas por medio del polinomio $P_3(x)$ obtenido en el inciso anterior.

   d) Grafique las dos soluciones.

   e) Aplique el polinomio obtenido a los puntos P de la tabla y compare con los valores tabulados.

   f) Aplique el polinomio obtenido $P(x)$, redondeando los coeficientes para que tengan solo 3 digitos *decimales*, a los puntos de la tabla. Que conclusiones obtiene?

2. Hasta ahora hemos visto como crear polinomios interpolantes que igualan los valores de la función en ciertos puntos. Uno también puede encontrar polinomios que se ajustan no solo a los valores de la función, pero también a sus derivadas en los mismos puntos.

   a) Dado el problema de encontrar un polinomio cúbico $P(x)$ que cumpla con $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$, $P'(a) = f'(a)$ y $P'(b) = f'(b)$, plantear el problema como un sistema de ecuaciones lineales.

   b) Encontrar $P(x)$ para el caso particular de la función $f(x) = e^x/x$, para $a = 1$ y $b = 3$, sabiendo que $f(1) = 2.71828$, $f'(1) = 0$, $f(3) = 6.69518$ y $f'(3) = 4.46345$.

   c) Verificar que $P(x) = f(x)$ y $P'(x) = f'(x)$ en los dos puntos a y b.

   d) Evaluar $P(x)$ en $x = 2$ y comparar con el valor de la función $f(x)$ en ese punto, via error absoluto y relativo.

3. Dada la función $f(x) = xe^x - 1$

   a) Desarrolle **manualmente** un polinomio de Taylor $P_3(x)$ de orden 3 para aproximar $f(x)$ alrededor del punto $x_0 = 0$.

   b) Desarrolle **manualmente** un polinomio de Taylor $P_5(x)$ de orden 5 para aproximar $f(x)$ alrededor del punto $x_0 = 0$.

   c) Grafique la función $f(x)$ y los polinomios $P_3(x)$ y $P_5(x)$ en el intervalo [0 2]

   d) Evalue $f(x)$, $P_3(x)$ y $P_5(x)$ en los puntos $x_1 = 0.01$, $x_2 = 0.5$ y $x_3 = 1.5$. Muestre los resultados en una tabla.

	$f(x)$	$P_3(x)$	$P_5(x)$
$x_1 = 0.01$			
$x_2 = 0.5$			
$x_3 = 1.5$			

e) Calcule los errores relativos y absolutos para los puntos del inciso anterior. Muestre los resultados en una tabla. Saque conclusiones.

Absoluto	$P_3(x)$	$P_5(x)$
$x_1 = 0.01$		
$x_2 = 0.5$		
$x_3 = 1.5$		

Relativo	$P_3(x)$	$P_4(x)$
$x_1 = 0.01$		
$x_2 = 0.5$		
$x_3 = 1.5$		

4. Dada la función $f(x) = xe^x - 1$

a) Genere una tabla de valores para $f(x)$ para los siguientes valores de x

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
$y_i = f(x_i)$				

b) Use los 3 primeros valores de la tabla anterior para obtener **manualmente** un polinomio interpolador de Lagrange de orden 2:

$$P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

c) Use todos los valores de la tabla anterior para obtener **manualmente** un polinomio interpolador de Lagrange de orden 3:

$$P_3(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) + y_4L_4(x)$$

d) Evalue $f(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$ en los puntos $x = 0.01$, $x = 0.5$ y $x = 1.5$. Muestre los resultados en una tabla.

	$f(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
$x = 0.01$			
$x = 0.5$			
$x = 1.5$			

e) Calcule los errores relativos y absolutos para los puntos del inciso anterior. Muestre los resultados en una tabla. Saque conclusiones.

Absoluto	$P_2(x)$	$P_3(x)$
$x = 0.01$		
$x = 0.5$		
$x = 1.5$		

Relativo	$P_2(x)$	$P_3(x)$
$x = 0.01$		
$x = 0.5$		
$x = 1.5$		

5. Realice un programa en MATLAB, que a partir de un conjunto de n puntos, aplique polinomio interpolante de LAGRANGE a un nuevo punto x. Aplique al problema del ejercicio 1 para comparar los resultados.

6. La siguiente es una tabla similar a la del ejercicio 1, pero mas completa.

P (atm)	1	2	5	10	20	30	40
T (°C)	56.5	78.6	113.0	144.5	181.0	205.0	214.5

a) Grafique la solución obtenida, superpuesta con el resultado del inciso b) del ejercicio 1.

b) Calcule el polinomio interpolante de LAGRANGE $P_L(x)$ correspondiente a la misma.

c) Evalue manualmente $P_L(x)$ en el punto $x = 15$

d) Compare la solución con el resultado del programa escrito en el ejercicio 5

7. En una prueba de tiro oblicuo, se obtuvieron los siguientes resultados.

x (m)	0.0	4.0	8.0	12.0	16.0	20.0	24.0	28.0	32.0	36.0	40.0
h (m)	0.000	1.435	2.265	3.365	3.838	3.992	3.842	3.653	2.555	1.443	0.000

a) Evalue el polinomio interpolante de Lagrange en los puntos de la tabla, usando el programa del ejercicio 5 para calcular los valores. Grafique el resultado.

b) ¿Se trata de una buena aproximación?

c) Repita el gráfico redondeando los coeficientes (al calcularlos, en el programa) a 5 cifras significativas. Que sucede?

8. La siguiente tabla muestra la variación de la tensión en función de la corriente en un arco magnético.

I (Amp)	1	2	3	4
V (Volts)	120.8	94.0	82.1	75.2

a) Calcule el polinomio interpolante de Lagrange de orden 3:

$$P_3(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x)$$

b) Calcule el polinomio interpolante de Newton $QP_3(x)$ con diferencias divididas progresivas, **en forma manual**.

c) Calcule el polinomio interpolante de Newton $QR_3(x)$ con diferencias divididas regresivas, **en forma manual**.

d) Compare en forma gráfica el resultado obtenido en los incisos anteriores con la fórmula empírica $v = f(i) = 30.4 + 90.4 * i^{(-0.507)}$ para puntos entre 1 y 4 con intervalos de 0.1.

e) Calcule v para $i_1 = 1.5$ e $i_2 = 3.5$ con las funciones f, P_3 y QP_3 y QR_3.

f) Calcule el error absoluto y relativo entre el valor de la fórmula empírica y los valores predichos por los polinomios interpolantes en el item anterior.

9. Realice un programa en MATLAB, que a partir de un conjunto de n puntos, devuelva los coeficientes correspondientes al polinomio interpolante de Newton con diferencias divididas progresivas.

10. Realice un programa en MATLAB, que a partir de un conjunto de n puntos, devuelva los coeficientes correspondientes al polinomio interpolante de Newton con diferencias divididas regresivas.

11. sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

   a) Calcular **manualmente** el polinomio interpolante de Newton $P_A(x)$, en el intervalo [-5, 5], usando aproximaciones **progresivas**, y como puntos de interpolación los puntos
   $x_k = -5cos(\frac{k}{n}\pi)$
   con $k = 0, ..., n$ y $n = 4$.

   b) Verificar el resultado graficando ambos $f(x)$ y $P_A(x)$ en el rango $[x_0\ ,\ x_n]$

   c) Obtener **manualmente** el polinomio $P_B(x)$ usando aproximaciones **progresivas** en los 3 puntos centrales x_1, x_2 y x_3.

   d) Obtener **manualmente** el polinomio $P_C(x)$ usando aproximaciones **regresivas** en los 3 puntos centrales x_1, x_2 y x_3.

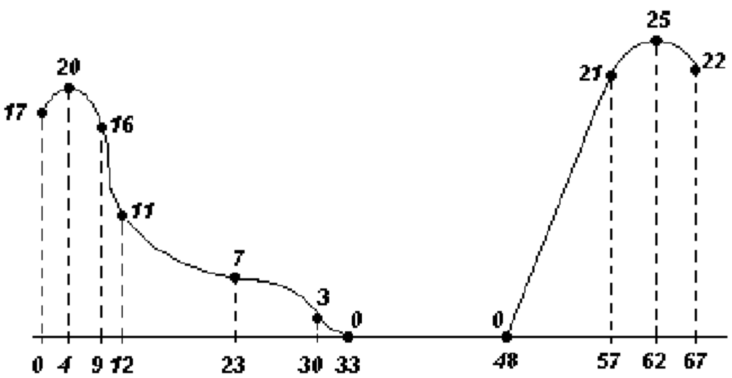
12. La siguiente tabla muestra los valores de pérdida (kW) en el núcleo de un motor eléctrico en función de la tensión aplicada.

e (Volts)	10	60	80	100	120	140	160
p (kw)	0.63	1.36	2.18	3.00	3.93	6.22	8.59

   a) Calcule los coeficientes del polinomio interpolante de Newton **usando diferencias divididas**.

   b) Grafique el mismo y calcule la pérdida que sufre el motor cuando se le aplica una tensión e = 90 Volts.

13. El siguiente dibujo presenta el perfil de una parte de una montaña rusa.



   a) A partir de los datos presentes en el mismo, obtenga los polinomios de Spline cúbicos necesarios para aproximar dicho perfil.

   b) Grafique el resultado obtenido y analice si se observan diferencias con la curva original.

   c) ¿ Se modifica el perfil si se agregan a los datos, los puntos [51, 7] y [54, 14] ? Justifique.

14. Para un polinomio $P_n(x)$ de grado n que aproxima una función $f(x)$ (por ejemplo por mínimos cuadrados), su *varianza*, calculada sobre m puntos $x_1, \ldots, x_m$, está definida por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - p_n(x_i)]^2}{(m-n-1)}$$

a) A partir de los datos del ejercicio 6 obtenga la aproximación de mínimos cuadrados para valores de $n = 1, 2, 3, \ldots, m-1$.

b) Cuál de ellas es la aproximación de mínimos cuadrados de varianza mínima?

c) Compare la curva obtenida, para la aproximación de varianza mínima, con la correspondiente a la solución del ejercicio 6.

15. Al medir la velocidad (por medio de un tubo de Pitot) en una tubería circular de 20 cm. de diámetro interior, se obtuvieron los siguientes datos:

r(cm)	0	3	5	7	8
v(cm/seg)	600	550	450	312	240

a) Obtenga los coeficientes del polinomio aproximante de primer grado.

b) Obtenga los coeficientes del polinomio aproximante de segundo grado.

c) Grafique ambos polinomios aproximantes, junto a los valors de la tabla.

d) Calcule el valor de la velocidad correspondiente a r = 4cm para ambas soluciones.

e) Calcule el error y la varianza de la regresión para ambas soluciones.

f) En función del error, cuál de las dos soluciones es preferible?

g) En función de la variancia, cuál de las dos soluciones es preferible?

16. La siguiente tabla enumera los valores de la función $f(x) = 2e^x - x^2$ en algunos puntos:

x	0	1	2	3	4
y=f(x)	2	4.4366	10.77811	31.1711	93.1963

a) Calcular **manualmente** los coeficientes de un trazador cúbico natural para aproximar la función en base a los valores de la tabla. (Puede usar Matlab para resolver el sistema de ecuaciones y otras operaciones complejas).

b) Calcular los coeficientes usando la función *spline* del Matlab.

c) Calcular el polinomio interpolante de Newton (usando el programa desarrollado en el ejercicio 8.

d) Graficar la función original y las tres aproximaciones obtenidas en el intervalo [0 4] y comparar los resultados.

e) Redondear los coeficientes de los 3 casos (splines y polinomio interpolante de Newton) para que tengan solamente un digito *decimal*. Graficar nuevamente las aproximaciones y sacar conclusiones.

f) Aplicar todas las aproximaciones al punto $x_0 = 1.25$, calcular el error absoluto y relativo y sacar conclusiones.