Temas: *Problemas de valores iniciales. Método de Euler, Método de Heun, Método de la Serie de Taylor, Método de Runge-Kutta. Concepto de métodos predictores-correctores. Problemas de valores de frontera. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Ecuaciones diferenciales de orden superior. Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales.*

1. Sea la EDO $\frac{dy}{dt} = 2ty^2$ con condicion inicial $y(0) = 1$,

   a) Calcule **manualmente** $y(0.4)$ usando el método de Euler, con pasos h=0.04, h=0.02 y h=0.01

   b) Grafique las soluciones.

   c) Sabiendo que la solución de la EDO es $y(t) = \frac{1}{1-t^2}$, calcule el error absoluto de las soluciones obtenidas en el inciso anterior.

2. Sea la EDO $y' = (t - y)/2$, con condicion unicial $y(0) = 1$,

   a) Encuentre **manualmente** la solución $y(t)$ en el intervalo [0 3] con tamaños de paso $h = 1$, $h = 1/2$ y $h = 1/4$.

   b) Genere una tabla con las soluciones para cada método y cada tamaño de paso, mas la solución exacta $y(t) = 3e^{-t/2} - 2 + t$.

   c) Grafique las soluciones.

   d) Calcule el error absoluto y relativo para cada caso cuando $t = 3$.

3. Realice un programa MATLAB que implemente el método de Euler simple.

4. Realice un programa MATLAB que implemente el método de Euler mejorado.

5. Realice un programa MATLAB que implemente el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

6. Encuentre la solución $y(t)$ para el ejercicio 1 usando los métodos previamente programados, para los mismos tamaños de paso.

7. Encuentre la solución $y(t)$ para el ejercicio 2 usando los métodos previamente programados, para los mismos tamaños de paso.

8. Se le aplica una fuerza de 10 Newtons a un cuerpo de masa $m = 5g$ originalmente en reposo. Se quiere poder graficar la distancia recorrida x como una función del tiempo t. Plantear el problema como una ecuación diferencial de segundo orden, y resolver por Euler entre $t = 0$ y $t = 5$, con intervalos de 1 segundo.

9. Un proyectil de masa m=0.11Kg se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 80m/seg$. Dicha velocidad irá disminuyendo por efecto de la fuerza de gravedad y de la resistencia ofrecida por el aire. La ecuación diferencial que rige la velocidad del proyectil es:

   $$m * \frac{dv}{dt} = -m * g - k * v^2$$

   Calcule por medio del método de Euler mejorado los diferentes valores de velocidad que toma el proyectil hasta alcanzar su altura máxima. Considere $g = 9.8m/seg^2$ y k=0.002Kg/m

a) Utilice un paso h=0.1seg.
b) Compare con los resultados obtenidos con h=0.01seg.

10. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y \qquad \text{con} \qquad x(0) = 6$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y \qquad\qquad y(0) = 4$$

a) Usar los métodos de Euler y Runge-Kutta para resolver el sistema de ecuaciones: para $t = 0.20$, con intervalo $h = 0.02$.
b) Graficar y comparar el resultado con la solucion exacta data por

$$x(t) = 4e^{4t} + 2e^{-t}$$
$$y(t) = 6e^{4t} - 2e^{-t}$$

c) Comparar los resultados con el comando **ode45** de Matlab.

11. Un problema de simulación denominado cazador-presa es modelado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dp}{dt} = k_1 * p - k_2 * c * p$$
$$\frac{dc}{dt} = k_3 * c * p - k_4 * c$$

Calcule como varían las poblaciones de cazadores y presas por medio de un método de Runge-Kutta sabiendo que $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.02$, $k_3 = 0.001$, $k_4 = 0.03$. Adopte como condiciones iniciales p(0)=30 y c(0)=3.

12. Dado el problema

$$u'' - \left(1 - \frac{x}{5}\right) u = x$$

con condiciones de frontera $u(1) = 2$, $u(4) = -1$, y tamaño de intervalo $h = 1$.

a) Resolver usando el método del disparo.
b) Resolver usando diferencias finitas.

13. Dada la ecuación diferencial $u'' = u$, con $u(1) = 1.175201$ y $u(3) = 10.017875$

a) Resolver por el método de las diferencias finitas, usando $h = 1$ y $h = 0.5$.
b) Comparar la solucion obtenida en todos los puntos con la solución analítica $u(x) = sinh(x)$
c) En que punto x se genera el mayor error absoluto respecto de la solución analítica?

d) Como se comporta el error con respecto a la disminución por la mitad del intervalo h (en el punto $x = 2$)?

14. Se desea conocer el flujo de calor en un alambre aislado, de 2cm de longitud, cuyo modelo responde a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

donde $K = 0.1515$ es el coeficiente de conductividad. La temperatura inicial está dada por

$$T(x, t_0) = 100x \quad si \quad x < 1 \tag{1}$$
$$T(x, t_0) = 200 - 100x \quad si \quad x \geq 1 \tag{2}$$

y las condiciones de contorno estan dadas por

$$T(0, t) = 0 \tag{3}$$
$$T(2, t) = 0 \tag{4}$$

Usar $k = \Delta_t = 0.2$ y $h = \Delta_x = 0.25$

a) Calcular las temperaturas **manualmente** para $T_{i,2}$ (t=0.2 seg) usando el método explícito
b) Calcular las temperaturas para todo t hasta 10 seg, usando el método explícito
c) Calcular las temperaturas para todo t hasta 10 seg, usando el método implícito
d) Repetir los dos cálculos para $k = \Delta_t = 0.25$
e) Graficar y comparar los resultados (usar la función **mesh** or **surf**)

15. Analizar la vibración de una cuerda atada en los extremos usando la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

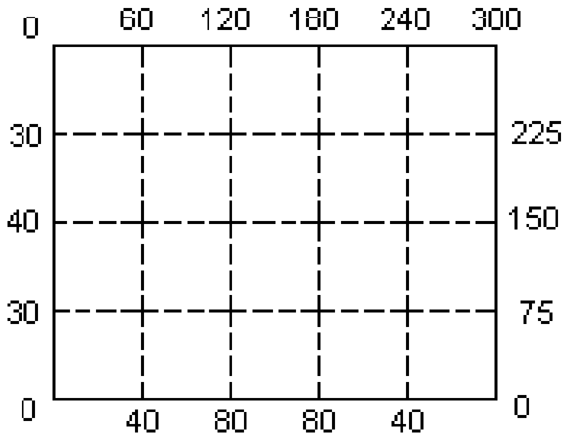
- $c = 2$
- $0 < x < 1$, $0 < t < 0.5$
- $y(0, t) = 0$, $y(1, t) = 0$ para $0 \leq t \leq 0.5$
- Posición inicial ($t = 0$): $y(x, 0) = f(x) = sin(\pi x) + sin(2\pi x)$, para $0 < x < 1$
- Velocidad inicial ($t = 0$): $y'(x, 0) = g(x) = 0$, para $0 < x < 1$
- $h = \Delta_x = 0.1$

a) Analizar la vibración hasta $t = 0.5$ usando $k = \Delta_t = 0.05$
b) Analizar la vibración hasta $t = 0.5$ usando $k = \Delta_t = 0.04$

c) Graficar y comparar los resultados

16. Se desea conocer la distribución de temperaturas en estado de equilibrio en el interior de una placa rectangular de acero, cuyo modelo responde a la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$



Halle los valores de temperatura en los nodos, por medio de diferencias finitas.