Transformadas de Laplace

Definición

$$F\left(s\right)=L\left\{f\right\}\left(s\right)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Potencias

$f\left(t\right)$	$F\left(s\right)=L\left\{f\right\}\left(s\right)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$,n entero y positivo
$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
$t^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
t^α	$\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha>-1$

Funciones trigonomótricas

$f\left(t\right)$	$F\left(s\right)=L\left\{f\right\}\left(s\right)$
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$\sin^2 kt$	$\frac{2k^2}{s\left(s^2+4k^2\right)}$
$\cos^2 kt$	$\frac{s^2+2k^2}{s\left(s^2+4k^2\right)}$
$t\sin kt$	$\frac{2ks}{\left(s^2+k^2\right)^2}$
$t\cos kt$	$\frac{s^2-k^2}{\left(s^2+k^2\right)^2}$
$\frac{2\left(1-\cos kt\right)}{t}$	$\ln\frac{s^2+k^2}{s^2}$
$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$

$f(t)$	$F(s) = L\{f\}(s)$
$\sin kt + kt\cos kt$	$\dfrac{2ks^2}{\left(s^2+k^2\right)^2}$
$\sin kt - kt\cos kt$	$\dfrac{2k^3}{\left(s^2-k^2\right)^2}$
$1 - \cos kt$	$\dfrac{k^2}{s\left(s^2+k^2\right)}$
$kt - \sin kt$	$\dfrac{k^3}{s^2\left(s^2+k^2\right)}$
$\dfrac{a\sin bt - b\sin at}{ab\left(a^2-b^2\right)}$	$\dfrac{1}{\left(s^2+a^2\right)\left(s^2+b^2\right)}$
$\dfrac{\cos bt - \cos at}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s}{\left(s^2+a^2\right)\left(s^2+b^2\right)}$
$\dfrac{\sin at\cos bt}{t}$	$\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a+b}{s} + \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a-b}{s}$
$\dfrac{\sin \varpi t - \varpi t\cos \varpi t}{\omega^2}$	$\dfrac{s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$

Funciones hiperbólicas

$f(t)$	$F(s) = L\{f\}(s)$
$\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
$\sinh^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s\left(s^2-4k^2\right)}$
$\cosh^2 kt$	$\dfrac{s^2-2k^2}{s\left(s^2-4k^2\right)}$
$t\sinh kt$	$\dfrac{2ks}{\left(s^2-k^2\right)^2}$
$t\cosh kt$	$\dfrac{s^2+k^2}{\left(s^2-k^2\right)^2}$
$\dfrac{2\left(1-\cosh kt\right)}{t}$	$\ln\dfrac{s^2-k^2}{s^2}$

Funciones exponenciales

$f(t)$	$F(s) = L\{f\}(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, n entero y positivo
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln \frac{s-a}{s-b}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{1}{(s+a)s}$
$\frac{at-1+e^{-at}}{a^2}$	$\frac{1}{(s+a)s^2}$
$\frac{t-\frac{1}{a}+\left(t+\frac{2}{a}\right)e^{-at}}{a^2}$	$\frac{1}{(s+a)^2 s^2}$

Funciones exponenciales con trigonométricas

$f(t)$	$F(s) = L\{f\}(s)$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$-\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\phi\right)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$1-\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\varpi_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\phi\right)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)s}$

Funciones exponenciales con hiperbólicas

$f(t)$	$F(s) = L\{ft\}(s)$
$e^{at}\sinh kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2 - k^2}$
$e^{at}\cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 - k^2}$

Funciones trigonométricas con hiperbólicas

$f(t)$	$F(s) = L\{f\}(s)$
$\sin kt \sinh kt$	$\dfrac{2k^2 s}{s^2 + 4k^4}$
$\sin kt \cosh kt$	$\dfrac{k(s^2 + 2k^2)}{s^4 + 4k^4}$
$\cos kt \sinh kt$	$\dfrac{k(s^2 - 2k^2)}{s^4 + 4k^4}$
$\cos kt \cosh kt$	$\dfrac{s^3}{s^4 + 4k^4}$

Función de Dirac

$f(t)$	$F(s) = L\{f\}(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}

Funciones con escalón unitario

$f(t)$	$F(s) = L\{f\}(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)\,u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$

Propiedades

$f(t)$	$F(s) = L\{f\}(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)\,u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$	$F(s)\, G(s)$