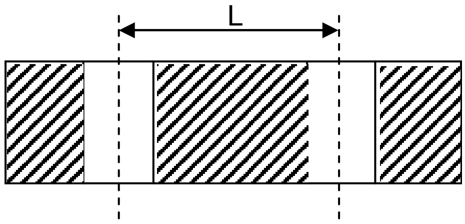
Incertidumbre en las mediciones directas e indirectas

Comenzaremos por distinguir dos diferentes tipos de mediciones:

Mediciones directas: La medida de la cota se obtiene en una única medición y con un instrumento de lectura directa.

Mediciones indirectas: El valor de la magnitud que se desea medir se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes, relacionados entre sí mediante una cierta función matemática.

La distancia entre centros de agujeros o ejes (distancia L, entre agujeros en la figura) es un claro ejemplo de una medición indirecta.



Un caso particular de las indirectas, son las mediciones por comparación, en donde las mediciones se realizan con comparadores y patrones.

Incertidumbre en la medición directa

Suponiendo que todos los errores derivados del ambiente y el operador son controlados (no significa que sean nulos), queda como única causa de error la incertidumbre del instrumento de medición que se utilice.

Por lo tanto, el valor de cada cota que se determina por medición directa, estará dado por:

$L = L_l \pm I$, donde: L, es el valor verdadero de la cota
L_l, es el valor leído
I, es la incertidumbre de medición

Si expresamos la incertidumbre de medición como:

$I = I_{inst}/2$ donde: I_{inst}, es la incertidumbre del instrumento de medición

el valor verdadero de la cota es indeterminado y podrá tomar cualquier valor comprendido entre un máximo L^+ y un mínimo L^-:

$$L^+ = L_l + I_{inst}/2$$

$$L^- = L_l - I_{inst}/2$$

Incertidumbre en la medición indirecta

Como se vio más arriba, en las mediciones por métodos indirectos, el valor de la magnitud que se desea medir, se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes, relacionados mediante una cierta función matemática.

En metrología dimensional, las magnitudes x_i suelen ser, en la mayoría de los casos, de tipo dimensional (lineal o angular) o geométrico. Además, las funciones de relación son siempre matemáticamente muy sencillas, por lo que pueden expresarse fácilmente en forma explícita.

En la cátedra de Física Experimental se dio una expresión general para el cálculo de propagación de incertezas en medidas indirectas. Para el caso de una magnitud q que depende de dos variables independientes (x e y), se puede escribir la siguiente expresión para la incertidumbre de q:

$$|\Delta q| = \left|\frac{\partial q}{\partial x}_{(\bar{x},\bar{y})}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial q}{\partial y}_{(\bar{x},\bar{y})}\right| |\Delta y|$$

donde: Δq, es la incertidumbre de la magnitud q
Δx y Δy, son las incertidumbres de las variables x e y

Esta expresión indica que la incertidumbre total en las mediciones indirectas está dada siempre por la suma de las incertidumbres de cada una de las mediciones parciales realizadas (afectadas por un factor de ponderación) y está asociada a un nivel de confianza mayor al 99%. Es decir, que más del 99% de los valores obtenidos para la magnitud q estarán comprendidos en el intervalo dado por su incertidumbre.

En este capítulo se determinará la incertidumbre de medición para el caso más general teniendo en cuenta normas internacionales de metrología, aplicando las funciones matemáticas de rigor y utilizando los parámetros de incertidumbre estándar, combinada y expandida.

La “Guía para la expresión de la incertidumbre de medición” (ISO/TAG 4/WG 3, 1993) define los siguientes tipos de incertidumbres:

- Incertidumbre estándar *(i)*. Incertidumbre del resultado de una medición expresada como una desviación estándar (nivel de confianza del 68%). La incertidumbre estándar se obtiene a partir de una distribución de posibles valores de una magnitud x_i. La distribución de probabilidad puede basarse en una serie de observaciones de x_i o puede ser conocida a priori.

- Incertidumbre combinada *(i_c)*. Incertidumbre estándar del resultado de una medición cuando este resultado es obtenido a partir de los valores de otras magnitudes (como en el caso de las mediciones indirectas). En general:

$$\boxed{i_c = \sqrt{c_1^2 i_1^2 + c_2^2 i_2^2 + \ldots + c_n^2 i_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 i_i^2}} \quad (1)$$

  donde los c_i son coeficientes de ponderación y las i_i^2 son las varianzas y/o covarianzas de las magnitudes x_i.

- Incertidumbre expandida *(I)*. Intervalo de valores alrededor del resultado de una medición donde se espera esté incluida una fracción considerable de ellos. Se obtiene multiplicando la incertidumbre combinada por un factor de cobertura k que representa, para una determinada distribución de probabilidad de ocurrencia, el nivel de confianza requerido.

$$I = k i_c$$

  En general, el factor de cobertura toma valores entre 2 y 3 que corresponden a niveles de confianza entre 95 y 99%, respectivamente.

Cálculo de la incertidumbre de una medida indirecta

Se plantean las siguientes hipótesis de partida:

1. El valor de la magnitud que se desea medir, se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes x_i, relacionados mediante una cierta función matemática de la forma:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

2. Las incertidumbres estándar de todas las magnitudes x_i que intervienen en la función de relación son conocidas.

3. Las variables x_i son independientes entre sí, lo que elimina las covarianzas en la expresión de la incertidumbre combinada.

Resulta,

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{x_1} \pm I_1 \\ x_2 &= \overline{x_2} \pm I_2 \\ &\ldots \\ x_n &= \overline{x_n} \pm I_n \end{aligned}$$

La variación de la función y cuando se producen variaciones aleatorias de las variables x_i a partir de sus valores medidos $\overline{x_i}$, puede formularse a partir de una aproximación en serie de Taylor.

Para el caso de una variable:

La serie de Taylor permite aproximar una función derivable en un entorno reducido alrededor de un punto a, mediante un polinomio cuyos coeficientes dependen de las derivadas de la función evaluadas en ese punto.

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

En el entorno de a, el término $(x-a)$ se hace muy pequeño. Por lo tanto, la función y aproximada se puede reducir a una serie de Taylor de primer orden:

$$y = f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = \bar{y} + \Delta y \text{ , donde: } \quad \begin{aligned} \bar{y} &= f(a) \\ \Delta y &= f'(a)(x-a) \end{aligned}$$

Generalizando para el caso de varias variables queda:

$$\bar{y} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) \qquad \Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})} (x_i - \overline{x_i})$$

La varianza de la función y está dada por:

$$\sigma_y^{\,2} = E\left[(y - \bar{y})^2\right] ,$$

donde el operador E es la esperanza o valor esperado.

Como $y = \bar{y} + \Delta y$, se puede escribir:

$$\sigma_y{}^2 = E\left[(\Delta y)^2\right] = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})} \left(x_i - \overline{x_i}\right)\right]^2\right\}$$

Teniendo en cuenta que:

$E[cZ] = cE[Z]$,

donde c es una constante y Z una variable aleatoria, se puede escribir:

$$\sigma_y{}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})}\right)^2 E\left[\left(x_i - \overline{x_i}\right)^2\right]$$

Por definición tenemos que:

$$E\left[\left(x_i - \overline{x_i}\right)^2\right] = \sigma_i{}^2$$

Entonces:

$$\sigma_y{}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})}\right)^2 \sigma_i{}^2$$

La desviación estándar de la función y se define como la raíz cuadrada positiva de su varianza, entonces:

$$\boxed{\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})}\right)^2 \sigma_i{}^2}} \qquad (2)$$

La expresión (2) es equivalente a la definición de la incertidumbre combinada de la “Guía para la expresión de la incertidumbre de medición” [expresión (1)] y podrá ser aplicada a la determinación de la incertidumbre de las mediciones indirectas, para cualquier aplicación.

Comparando las expresiones (1) y (2) puede verse que:

$$\sigma_y = i_c$$

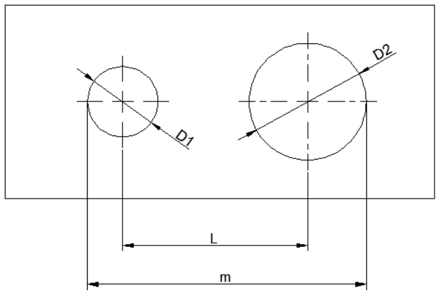
$$\sigma_i = i_i$$

$$\boxed{c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})}}$$

Ejemplos de aplicación

1. Determinación de la distancia entre centros de agujeros

Un caso típico de medida indirecta en metrología dimensional es la determinación de la distancia entre centros de agujeros, como se esquematiza en la siguiente figura.



La distancia entre centros *L* puede obtenerse, a partir de la cota *m* y de los diámetros de los agujeros *D1* y *D2*, mediante la siguiente ecuación:

$$L = m - \frac{D1}{2} - \frac{D2}{2}$$

Suponemos que las dimensiones nominales de las cotas *L*, *D1* y *D2* son 98 mm, 27 mm y 47 mm, respectivamente. Por lo tanto, la dimensión nominal de *m* es 135 mm.
Para medir las cotas *m*, *D1* y *D2* se utilizan micrómetros de interior cuyas incertidumbres expandidas están dadas por las siguientes expresiones:

Campo 25 – 50 mm $\qquad I[\mu m] = \pm(4 + \frac{L[mm]}{25})$, factor de cobertura 2

Campo 125 – 150 mm $\qquad I[\mu m] = \pm(6 + \frac{L[mm]}{50})$, factor de cobertura 2

Si los resultados de las mediciones son los siguientes:

m = 136,23 mm , $\quad I_m = \pm$ 8,7246 µm , $\quad i_m = \pm$ 4,3623 µm

$D1$ = 27,34 mm , $\quad I_{D1} = \pm$ 5,0936 µm , $\quad i_{D1} = \pm$ 2,5468 µm

$D2$ = 47,39 mm , $\quad I_{D2} = \pm$ 5,8956 µm, $\quad i_{D2} = \pm$ 2,9478 µm

La distancia entre centros resulta:

L = 98,865 mm

La incertidumbre combinada de *L* está dada por la siguiente expresión:

$$i_L = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}_{\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\right)} \right)^2 i_i^{\,2}} = \sqrt{i_m^{\,2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 i_{D1}^{\,2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 i_{D2}^{\,2}}$$

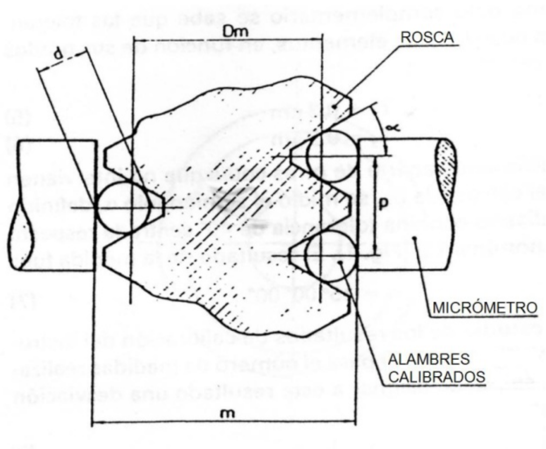
Finalmente, la incertidumbre combinada de *L* resulta:

$i_L = \pm 4{,}7774\ \mu m$

Este valor corresponde a un nivel de confianza del 68%, es decir, el 68% de los valores obtenidos de *L* va a caer dentro del intervalo dado por su incertidumbre combinada. Si queremos aumentar el nivel de confianza, debemos multiplicar este valor por un determinado factor de cobertura.

2. Determinación del diámetro medio de una rosca exterior

Un segundo caso es la medida del diámetro medio de una rosca exterior, de acuerdo con el método de los alambres calibrados. En este método se intercalan los alambres entre la rosca a controlar y un micrómetro de exteriores con el que se efectúa la medición, como se muestra en la siguiente figura.



Supongamos que se trata de una rosca métrica (ángulo del perfil de 60º) de paso 1 mm. El diámetro requerido para que los alambres calibrados sean tangentes al filete en el diámetro medio de la rosca, viene dado por la siguiente expresión:

$$dr = \frac{p}{2\cos\alpha} = 0{,}577 \text{ mm}$$

Los alambres calibrados disponibles en el laboratorio tienen un diámetro nominal de 0,5 mm. Por lo tanto, el contacto no se va a producir por debajo del diámetro medio. En este caso, el diámetro medio de la rosca *Dm* queda determinado por la siguiente expresión:

$$Dm = m - d\left(1 + \frac{1}{sen\alpha}\right) + \frac{p}{2tg\alpha}$$

Para medir el paso *p* y el semiángulo *α* del filete se utilizó un proyector de perfiles cuya incertidumbre expandida es de 10 μm para longitudes y 2’ para ángulos, con un factor de cobertura 2. Para medir el diámetro de los alambres calibrados *d* y la cota *m* se utilizó un micrómetro de exteriores cuya incertidumbre está dada por:

$$I[\mu m] = \pm(2 + \frac{L[mm]}{75}) \text{ , factor de cobertura 2}$$

Si los resultados de las mediciones son los siguientes:

m = 10,69 mm ,	I_m = ± 2,1425 μm ,	i_m = ± 1,07125 μm
d = 0,52 mm ,	I_d = ± 2,0069 μm ,	i_d = ± 1,00345 μm
p = 0,98 mm ,	I_p = ± 10 μm,	i_p = ± 5 μm
α = 29º54' ,	I_α = ± 2' = ± 5,818.10^{-4} rad,	i_α = ± 1' = ± 2,909.10^{-4} rad

El diámetro medio resulta:

Dm = 9.979 mm

La incertidumbre combinada de Dm está dada por la siguiente expresión:

$$i_{Dm} = \sqrt{i_m^{\,2} + \left(-1 - \frac{1}{sen\alpha}\right)^2 i_d^{\,2} + \left(\frac{1}{2tg\alpha}\right)^2 i_p^{\,2} + \left(\frac{d\cos\alpha}{sen^2\alpha} - \frac{p}{2sen^2\alpha}\right)^2 i_\alpha^{\,2}}$$

Cabe aclarar que en la expresión anterior la incertidumbre del ángulo α debe expresarse en radianes para que la incertidumbre combinada de Dm de en unidades de longitud.

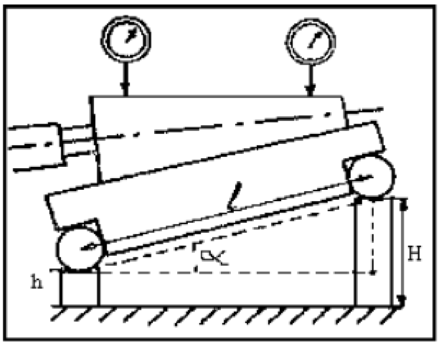
Finalmente, la incertidumbre combinada de Dm resulta:

i_{Dm} = ± 5,3991 μm

Este valor también corresponde a un nivel de confianza del 68%.

3. Medición de ángulos mediante regla de senos

La regla de senos es un instrumento que se utiliza para medir ángulos exteriores por un método indirecto con la ayuda de bloques patrón y un comparador. La figura muestra como ejemplo la medición del ángulo de un cono utilizando la mencionada regla de senos y dos pilas de bloques patrón.



La expresión para calcular el ángulo del cono es:

$$\alpha = arcsen\left(\frac{H-h}{L}\right)$$

A su vez, la incertidumbre combinada del ángulo α está dada por la siguiente expresión:

$$i_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial H} i_H\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial h} i_h\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial L} i_L\right)^2}\ , \qquad \text{donde:}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} arcsen\left(\frac{H-h}{L}\right) = \frac{1}{\sqrt{L^2-(H-h)^2}}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} arcsen\left(\frac{H-h}{L}\right) = \frac{-1}{\sqrt{L^2-(H-h)^2}}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L} arcsen\left(\frac{H-h}{L}\right) = \frac{-(H-h)}{L\sqrt{L^2-(H-h)^2}}$$

Reemplazando queda:

$$i_\alpha = \frac{1}{\sqrt{L^2 - (H-h)^2}} \sqrt{{i_H}^2 + {i_h}^2 + \frac{(H-h)^2}{L^2} {i_L}^2}$$

Si: H = 85,6 mm (la longitud de la combinación de bloques)
h = 51,4 mm (ídem anterior)
L = 100 mm (la distancia entre ejes de los cilindros de la regla de senos)

y: u_H = ± 0,00013 mm (la incertidumbre estándar de la pila de bloques)
u_h = ± 0,00012 mm (ídem anterior)
u_L = ± 0,002 mm (la incertidumbre estándar de la distancia entre ejes de los cilindros)

Resulta:

$$\alpha = arcsen\left(\frac{H-h}{L}\right) = 19°59'55{,}58''$$

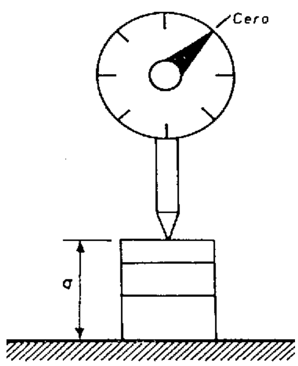
$$i_\alpha = \frac{1}{\sqrt{L^2 - (H-h)^2}} \sqrt{{i_H}^2 + {i_h}^2 + \left(\frac{H-h}{L}\right)^2 {i_L}^2} = 7{,}52 \times 10^{-6}\, rad = 1{,}55''$$

El cálculo anterior es una simplificación del caso real, pues no han sido considerados:

- Los errores de las dos lecturas del comparador y su corrección cuando la longitud de la pieza es diferente a la de la regla de senos.
- La corrección del error de paralelismo de la regla de senos.

Mediciones por comparación

Como ya se dijo, son un caso particular de las indirectas. El instrumento (comparador) se calibra (posición cero en la escala) con un patrón de referencia de cota nominal ***a*** (ver figura**)**. A continuación se reemplaza el patrón por la pieza a controlar y se lee en la escala la diferencia de medida (positiva o negativa) entre la cota que se mide y la cota nominal del patrón.



Para determinar la medida de la cota se suman la cota nominal de valor ***a*** más el valor leído en la escala del comparador (con su signo), es decir:

L = a + c donde, c es el valor leído en la escala del comparador

Siguiendo el cálculo efectuado para los ejemplos dados, la incertidumbre de medición estará dada por:

$$i_c(L) = \sqrt{{i_a}^2 + {i_c}^2}$$

Si la cota nominal resulta de la combinación de distintos bloques patrón, se debe calcular la incertidumbre combinada i_c(c) que introduce la combinación. Se deduce la importancia que tiene la precisión con que se fabricó el patrón de referencia.

IMPORTANTE: La selección del método y los instrumentos de medición para las mediciones indirectas también debe tener en cuenta la Regla de Oro de la metrología, es decir:

$$I = k\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,2} i_i^{\,2}} \leq 0{,}1T$$

Como resultado de ello, los valores requeridos para las incertidumbres i_i pueden resultar muy pequeños y difíciles de satisfacer. La solución está en la revisión del método de medición, reduciendo el número de determinaciones, accesorios y número de instrumentos, a efectos de disminuir la incertidumbre total de la medida indirecta. Además, analizar la aplicabilidad de la Regla generalizada de la Metrología.

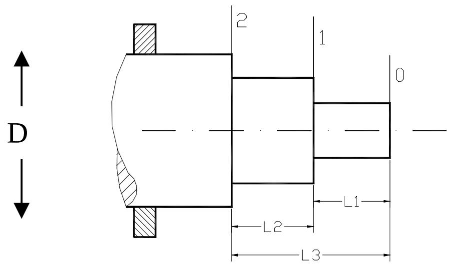
Controles de medida en una pieza durante un proceso de mecanizado

Otra aplicación de mediciones de tipo indirectas son los controles de medida de las diversas cotas que forma parte de una pieza durante el proceso de mecanizado, las cuales se vinculan entre sí según una determinada secuencia.

Ejemplo: Torneado de una pieza. De una barra cilíndrica de diámetro D se obtienen por torneado los sectores de longitudes L1 y L2 (ó L3), respectivamente (ver figura).

Una secuencia posible es:

a) Mecanizar el **tramo 0-1.** Se mide **L1** desde el plano **0**. (El plano 0 se adopta como referencia)
b) Mecanizar el tramo **1-2.** Se verifica la posición del plano **2** midiendo desde el plano **0** ó desde el plano **1**.



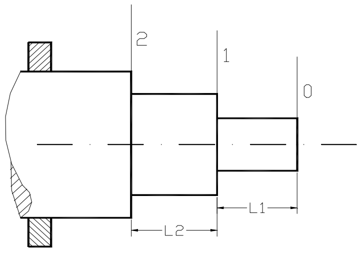
Las incertidumbres resultan:

$$i_{L3} < \sqrt{{i_{L1}}^2 + {i_{L2}}^2}$$

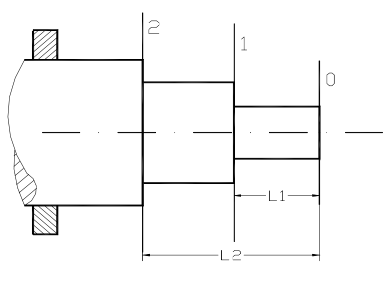
En el ejemplo, las dimensiones posibles de acotar en el plano son tres (L1, L2 y L3), sin embargo serán solo dos las que corresponde acotar, pues siempre una de ellas surge de la suma (o diferencia) de las otras dos.
De la funcionalidad de la pieza, particularmente de cada una de sus partes, dependerán cuales son las cotas a indicar en el plano, y sus tolerancias.

Formas de acotación en los planos

Se tienen de dos tipos: incremental o absoluta:



Acotación incremental



Acotación absoluta

La forma de acotación condiciona el modo de medir tanto para el control durante la producción como en el control final de la pieza, indicando a su vez el plano de referencia. Para el tipo incremental habrá más de un plano de referencia para cada cota. En el ejemplo son los planos 0 y 1, mientras que para el absoluto es único (plano 0). En el tema “Ajustes y tolerancias en cadenas dimensionales” se analiza la influencia de la forma de acotación sobre la precisión obtenida en las piezas.

--

Bibliografía

Guide To The Expresión Of Uncertainty In Measurement (ISO/TAG 4/WG 3), 1993.
Sánchez Pérez A.M. y Carro J.: “La determinación de la incertidumbre de medidas”, Novamáquina, Nº109, 1985, pp. 49-54.
Sánchez Pérez A.M. y Carro J.: “cálculo de la incertidumbre de una medida indirecta en metrología dimensional”, Novamáquina, Nº114, 1985, pp. 139-144.