

MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

Funciones analíticas

Demostrar que e^z es analítica en todo el plano complejo Z .

Singularidades de una función

1) Estudiar las singularidades de las siguientes funciones calculando límite:

a) $f(z) = \frac{1}{z - z^3}$

b) $f(z) = \frac{z^5}{(1 - z)^2}$

c) $f(z) = \frac{z - 3}{(z^2 - 9)z^2}$

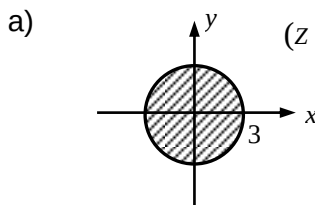
d) $f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^7}$

e) $f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z}$

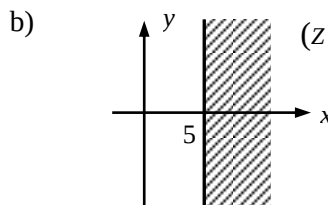
f) $f(z) = e^{1/z}$

Transformación Lineal: $w = Az + B$

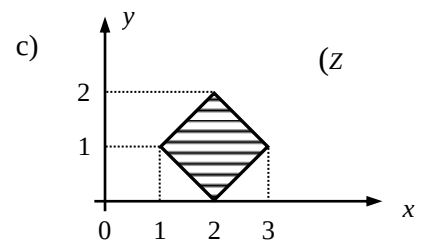
2) Recordando el significado geométrico de los coeficientes A y B obtenga, sin hallar las coordenadas de transformación, la imagen de los siguientes recintos con las transformaciones dadas en cada caso:



$$w = 2z + 6$$



$$w = \frac{1}{5} j z$$



$$w = (1 + j)z - 2j$$

3) Obtenga las imágenes de los recintos anteriores en forma analítica.

Transformación Inversa:

$w = \frac{1}{z}$

4) a) Demuestre que las rectas que pasan por el origen en el plano Z se transforman en rectas del mismo tipo en el plano W . ¿Qué relación hay entre las pendientes de ambas rectas?

b) Demuestre que las circunferencias de radio r centradas en el origen en el plano Z se transforman en circunferencias centradas en el origen en el plano W . ¿Qué relación hay entre los radios de ambas circunferencias?

5) Dada la siguiente región en el plano z , $(x - 1)^2 + y^2 - 1 > 0$, se pide:

a) Grafique la región en Z .

b) Halle y grafique la región transformada mediante la transformación $w = \frac{3}{z}$.

Transformación Bilineal:

$$w = \frac{A z + B}{C z + D}$$

6) ¿En qué se transforman los siguientes recintos mediante las transformaciones que se dan a continuación de cada uno?

a) $0 < x < 1$, $w = \frac{z-1}{z}$

b) $0 \leq x \leq 3, y \leq 2$, $w = \frac{2z-j}{jz+2}$

Observe que desde el punto de vista del trabajo algebraico es más conveniente tener la transformación escrita como z en función de w .

7) Hallar la transformación bilineal que transforma los puntos

$$z_1 = -j, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = j \quad \text{en} \quad w_1 = -1, \quad w_2 = j, \quad w_3 = 1.$$

Integrales en el Campo Complejo:

8) Calcule la siguiente integral $I = \int_C e^z dz$, donde C es un camino que va desde $z_{\text{inicial}} = 0$ a $z_{\text{final}} = 2+2j$, en cada uno de los siguientes casos:

- a) Siendo el camino C , la recta $y = x$.
- b) Siendo el camino C , la parábola $y = x^2/2$.
- c) Calcule la integral en Z entre z_{inicial} y z_{final} .

¿Qué puede decir acerca de los resultados hallados en los tres incisos?

9) Dada $I = \int_C \frac{\text{sen}(z)}{z+6} dz$, siendo C la elipse $z(t) = 5\cos(t) + j3\text{sen}(t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Analice:

- a) ¿Es C un camino abierto o cerrado?
- b) En caso de que el camino sea abierto, ¿la función integrando es analítica en una región que rodea dicho camino? Si el camino es cerrado, ¿la función integrando es analítica en la región encerrada por el camino?
- c) Resuelva la integral.

Calcular las siguientes integrales utilizando la Fórmula de la Integral de Cauchy o la Fórmula de la Derivada de la Integral de Cauchy según corresponda:

10) a) $\int_C \frac{e^{3z}}{(z-j\pi)} dz$ siendo C los caminos: a₁) $|z-1| = 4$ a₂) $|z| = 1$

b) $\int_C \frac{z+2}{(z+3)(z-1)} dz$ siendo C los caminos: b₁) $|z| = 2$ b₂) $|z| = 4$ b₃) $|z-2| = 1/2$

c) $\int_C \frac{e^{zt}}{(z^2+1)(z-j)} dz$ donde C es la curva $z(\theta) = 1+3e^{j\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $t > 0$

d) $\int_C \frac{\text{sen}(z)}{(z-1)^2(z^2+9)} dz$ con $C: |z| = 3/2$

e) $\int_C \frac{e^{jz}}{z^3} dz$ con $C: z(t) = 2e^{jt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

f) Resolver todos los incisos aplicando el teorema de los residuos.

Series de Potencias:

11) Dada la siguiente función, $f(z)$, se pide lo siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

- Grafique todas las zonas del plano Z en las cuales pueda desarrollarse $f(z)$ en potencias de z .
- Desarrolle $f(z)$ en cada zona, indicando su región de convergencia.
- Aproxime cada sumatoria hasta los términos de segundo grado inclusive y haga lo siguiente:
 - Observando las series, diga en qué zona tiene sólo potencias positivas, en cuál sólo potencias negativas y en cuál tiene potencias tanto positivas como negativas de z .
 - Para $z = 0,1$ calcule el valor de $f(z)$ y de cada una de las sumatorias aproximadas. ¿Cuáles de las sumatorias convergen a $f(z)$ para el valor de z dado?
 - Haga lo mismo que en el punto anterior pero para $z = j$.
¿Qué sucede en este caso? ¿Hay alguna serie de las ya calculadas que converja a $f(j)$?
¿Por qué?

12) Para las siguientes funciones:

- Grafique todas las zonas del plano z donde pueda desarrollarse $f(z)$ alrededor del punto " a " dado.
- Obtenga las series correspondientes a las zonas que determinó en el inciso anterior e indique las regiones de validez de dichas series.

a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^{15}(z-3)}$, $a = 1$

b) $f(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^3}$, $a = 0$

c) $f(z) = e^z \sin(z)$, $a = 0$

d) $f(z) = \sin\left[\frac{1}{z-1}\right]$, $a = 1$

e) $f(z) = \frac{z-1}{z^2 - 6z + 5}$, $a = 1$

- De las series que desarrolló en el ejercicio anterior, observe las potencias negativas en la zona cercana y diga qué tipo de punto es el que se encuentra en el centro de la serie y cuánto vale su residuo.
- Si se suman dos series de potencias, una con región de convergencia $|z| < 3$ y otra con región de convergencia $|z| > 1$, ¿cuál será la región de convergencia de la suma de estas dos series?
- Dada la siguiente función:

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)(z - 1 - j)}$$

a) Halle sus singularidades.

- b) Grafique todas las regiones en las que es posible hallar un desarrollo en series de potencias de $z-1-j$.
 c) Halle todos los desarrollos posibles indicando analítica y gráficamente su región de convergencia.

16) Estudie el carácter de las singularidades de la siguiente función a partir del correspondientes desarrollo en serie: $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z}$.

Repita el estudio para todas las funciones del Ejercicio 1)

17) Calcular las siguientes integrales aplicando residuos:

a) $\int_C \frac{1}{\operatorname{Sh}(z)} dz$ con $C: |z| = 4$

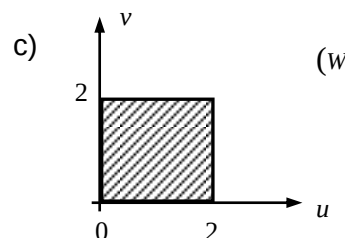
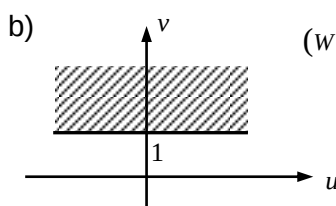
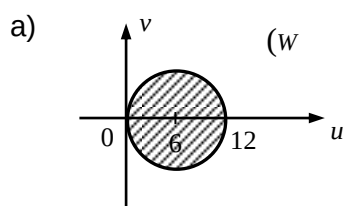
b) $\int_C \frac{1}{z^3 - 2z^2 + 2z} dz$ siendo C el contorno del recinto: $x+y \leq 3$, $x+y \geq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

c) $\int_C \operatorname{sen}\left(\frac{z}{z+1}\right) dz$ siendo C el contorno del recinto: $y^2 \leq x+2$, $x \leq 0$

Matemática Avanzada TRABAJO PRÁCTICO N° 1 Respuestas a los ejercicios

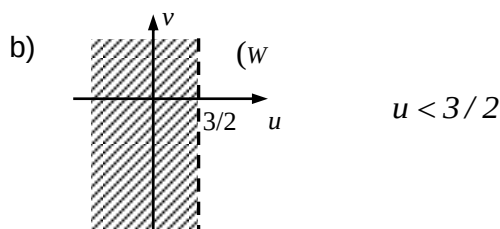
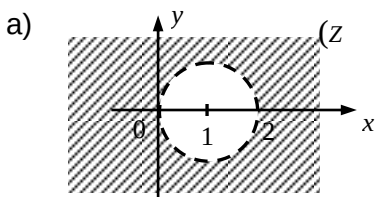
- 1)**
- a) $z = 0$ y $z = \pm 1$ son polos de primer orden (o simples).
 - b) $z = 1$ es polo de segundo orden (o doble).
 - c) $z = 3$ es singularidad evitable, $z = -3$ es polo simple, $z = 0$ es polo doble.
 - d) $z=0$ es un polo de quinto orden.
 - e) $z=0$ es una singularidad evitable.
 - f) $z=0$ es una singularidad esencial.

2)



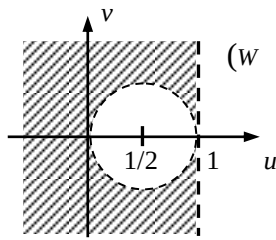
- 3)** a) $(u-6)^2 + v^2 \leq 36$ b) $v \geq 1$ c) $0 \leq v \leq 2$, $0 \leq u \leq 2$

5)



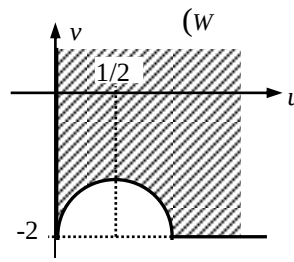
6)

a)



$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 > \frac{1}{4}, \quad u < 1$$

b)



$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + (v + 2)^2 \geq \frac{1}{4}, \quad u \geq 0, \quad v \geq -2$$

7) $w = j \frac{(1-z)}{(1+z)}$

8) $I = e^{2(1+j)} - 1$, para los tres incisos.

9) $I = 0$

10) $a_1) -2\pi j$ $a_2) 0$

$b_1) \frac{3}{2}\pi j$ $b_2) 2\pi j$ $b_3) 0$

c) $\pi [t \cos(t) - \sin(t) + j t \sin(t)]$

d) $\frac{\pi}{25} j [5 \cos(1) - \sin(1)]$

e) $-\pi j$

11) b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] z^n \quad \text{si } |z| < 1$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} z^n \quad \text{si } 1 < |z| < 2$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [2^n - 1] z^{-(n+1)} \quad \text{si } |z| > 2$$

c) $S_1(z) \cong \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 \quad |z| < 1$

$$S_2(z) \cong -\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 \right) \quad 1 < |z| < 2$$

$$S_3(z) \cong \frac{1}{z^2} \quad |z| > 2$$

12) a) $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} (z-1)^{n-15}$ si $0 < |z-1| < 2$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-1)^{-(n+16)} \quad \text{si } |z-1| > 2$$

b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} z^{2n}$ si $0 < |z| < \infty$

c) $f(z) = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+j)^n - (1-j)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{4}\right) z^n \quad \forall z$

d) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} (z-1)^{-2n+1}$ si $|z-1| > 0$

e) $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} (z-1)^n$ si $0 < |z-1| < 4$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (z-1)^{-(n+1)} \quad \text{si } |z-1| > 4$$

13) a) Polo de orden 15, Residuo $b_1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$.

b) Singularidad evitable, Residuo $b_1 = 0$.

c) Punto regular, Residuo $b_1 = 0$.

d) Punto regular, Residuo $b_1 = 0$.

e) Singularidad esencial, Residuo $b_1 = 1$.

f) Singularidad evitable, Residuo $b_1 = 0$.

15) a) Singularidades: $z = 1+j$ $z = j$ $z = -j$.

b) Zona cercana: $0 < |z-1-j| < 1$.

Zona intermedia: $1 < |z-1-j| < \sqrt{5}$.

Zona lejana: $|z-1-j| > \sqrt{5}$.

c) $f(z) = \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(1+2j)^{n+1}} - 1 \right) \left((z-j-1)^n + (1+j)(z-j-1)^{n-1} \right)$ $0 < |z-1-j| < 1$

$$f(z) = \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(1+j)(z-j-1)^{n-1}}{(1+2j)^{n+1}} - \frac{1+j}{(z-j-1)^{n+2}} + \frac{(z-j-1)^n}{(1+2j)^{n+1}} - \frac{1}{(z-j-1)^{n+1}} \right) \quad 1 < |z-1-j| < \sqrt{5}$$

$$f(z) = \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left((1+2j)^n - 1 \right) \left(\frac{1+j}{(z-j-1)^{n+2}} - \frac{1}{(z-j-1)^{n+1}} \right) \quad |z-1-j| > \sqrt{5}$$

16) Singularidad esencial.

Ejercicio 1: Como se pide estudiar el carácter de cada singularidad se hacen los desarrollos en serie sólo en la **zona cercana** alrededor de cada punto singular.

a) $z=0$ $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n + 1) z^{n-1}$ $0 < |z| < 1$ $z=0$ es un polo de primer orden con $b_1=1$ ($n=0$)

$z=1$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - (-1)^n \right) (z-1)^{n-1}$ $0 < |z-1| < 1$ $z=1$ es un polo de primer orden con $b_1 = -1/2$

$z=-1$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right) (z+1)^{n-1}$ $0 < |z+1| < 1$ $z=-1$ es un polo de primer orden, con $b_1 = -1/2$

b) $z=1$ $f(z) = (z-1)^3 + 5(z-1)^2 + 10(z-1) + 10 + \frac{5}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2}$

$z=1$ es un polo de segundo orden con $b_1 = 5$

c) $z=0$ $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n + 1}{3^{n+1}} z^{n-2} - \frac{(-1)^n + 1}{3^{n+2}} z^{n-1} \right)$ $0 < |z| < 3$

Es un polo de segundo orden; $b_1 = -1/9$

$z=3$ $f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{n+1}{3^{n+2}} \right) (z-3)^n$ $|z-3| < 3$

Es una singularidad evitable; $b_1 = 0$

$z=-3$ $f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6^n} + \frac{2n}{3^n} \right) (z+3)^{n-1} - \left(\frac{1}{6^{n+1}} + \frac{n}{3^{n+1}} \right) (z+3)^n$ $0 < |z+3| < 3$

Es un polo de segundo orden; $b_1 = 1/9$

d) $z=0$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} z^{2n-5}$ $|z| > 0$ es un polo de quinto orden; $b_1 = 0$

e) $z=0$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n$ $|z| > 0$ es una singularidad evitable; $b_1 = 0$

f) $z=0$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z} \right)^n$ $|z| > 0$ es una singularidad esencial; $b_1 = 1$

17) a) $-2\pi j$

b) $\frac{\pi}{2} (1-j)$

c) $-2\pi j \cos(1)$