MATEMÁTICA AVANZADA
TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

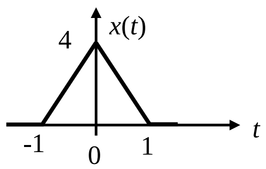
Sistemas Lineales - Análisis de Señales - Convolución

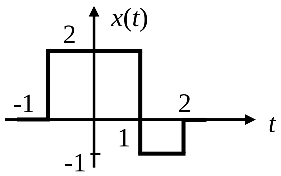
DESCRIPCIÓN DE SEÑALES: FUNCIONES RAMPA, ESCALÓN Y DELTA DE DIRAC

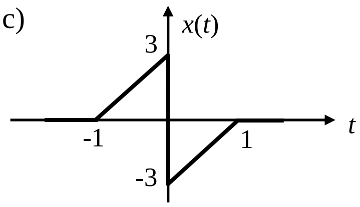
1) Grafique las siguientes funciones del tiempo.

a) $u_s(2t + 1)$ b) $r(2 - t)$ c) $u_s(t)\, u_s(1 - t)$ d) $P_3(t\text{-}2)$ e) $r(t)\text{-}2r(t\text{-}1)$

2) Escriba una representación matemática para cada una de las siguientes señales, en términos de la funciones escalón y rampa unitarios.

a)


b)


c)


3) Representar gráficamente cada una de las siguientes funciones.

a) $e^{-a\,t}\,\delta(t-1)$ b) $2\,u_s(t)+3\delta(t-2)$ c) $\operatorname{sen}(t)\,\delta\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ d) $u_s(1-t)\;\delta(t+2)$

4) Evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\infty}\delta(t-2)\,\cos\big(\omega(t-3)\big)\,dt$ b) $\int_0^{\infty} t\,u_s(2-t)\,u_s(t)\,dt$ c) $\int_0^{\infty} e^{-2t}\;\delta(\lambda-t)\;\delta(\lambda-2)\;d\lambda$

d) $\int_0^{\infty}(t^4+6t^3-5t^2-2)\;\delta'(t-1)\;\;dt$ e) $\int_0^{\infty}\cos\big(\omega(t-3)\big)\,\delta''(t-2)\;\;dt$

Señales periódicas

5) Indique si las siguientes señales de tiempo continuo son periódicas o no. En caso afirmativo determine su período y frecuencia fundamental en rad/s y en Hz.

a) $x(t)=2\sin(20\pi\,t)$ c) $z(t)=x_1(t)+x_2(t)$ con $x_1(t)$ de período T_1=2

b) $y(t)=\sin(4\pi\,t)+\sin(8\pi\,t)$ $x_2(t)$ de período $T_2=\sqrt{3}$

Señales pares e impares

6) Dada las siguientes señales:

$x_1=1$ $-1 < t < 1$

$x_2=t^3$ para todo t

$x_3=t^2$ para todo t

$x_4=t$ $-1 < t < 1$

a) Grafíquelas y clasifíquelas en pares o impares.

b) Haga, analítica y gráficamente, los siguientes productos y clasifique los resultados como funciones pares o impares:

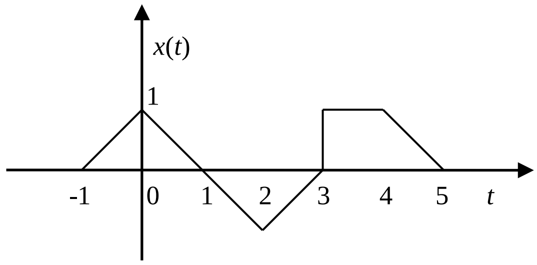
i) $y_1(t)=x_1(t)x_3(t)$

ii) $y_2(t)=x_1(t)x_4(t)$

iii) $y_3(t)=x_2(t)x_4(t)$

c) ¿Qué conclusiones obtiene a partir del inciso b)?

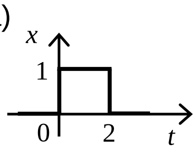
7) Considere la siguiente señal:

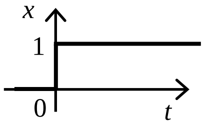


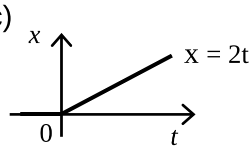
Muestre **gráficamente** que $x(t)$ puede escribirse como la suma de una función par, $x_p(t)$, y una función impar, $x_i(t)$, siendo $x_p(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)+x(-t)\right)$ y $x_i(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)-x(-t)\right)$.

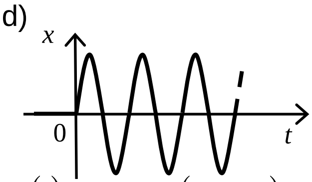
Análisis de Señales, Potencia y Energía

8) Calcule la potencia media y la energía de las siguientes señales en el intervalo de tiempo donde son distintas de cero. Clasifíquelas en señales de potencia, energía o de orden superior, usando las pruebas matemáticas previstas para tal fin.

a)


b)


c)


d)


$x(t)=V_p\ \mathrm{sen}(2\pi 50t)u_s(t)$

9) Encuentre las señales que resultan de las siguientes operaciones y clasifíquelas como de energía o de potencia.

a) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ para $x(t)$ como en 2.b) y 2.c)

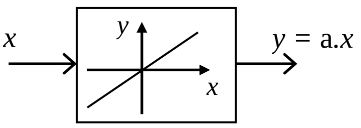
b) $x(3t)$, $x(t/3)$ y $x(t+3)$ con $x(t)$ como en 8.a) y 8.c)

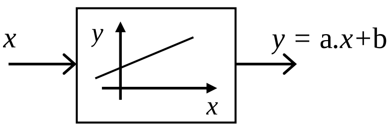
Observe el inciso a), ¿Cuál le parece que es la condición de la señal $x(t)$ que hace que la señal $y(t)$ sea de energía o de potencia?

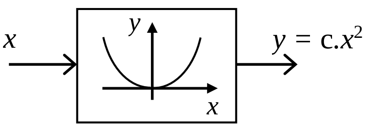
ANÁLISIS DE SISTEMAS

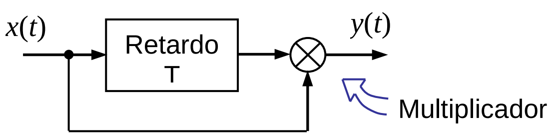
Linealidad

10) Verificar si los siguientes sistemas son lineales o no.

a)


b)


c)


d)


e) $y''(t) - 7y'(t-5) + 10y(t) = x(t)$ f) $\ln(y') + 2y = x$

Propiedad de Memoria

11) Decir cuales de estos sistemas tienen memoria y cuales no. Justifique.

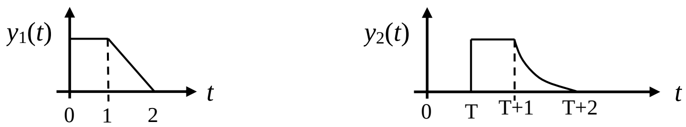
a) $y(t) = 3x(t)$ b) $y(t) = x(t) + 3x(t-2) + 8x(t-5)$ c) $v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$

d) $3y''(t) + 2t\,y'(t) + y(t) = x(t)$

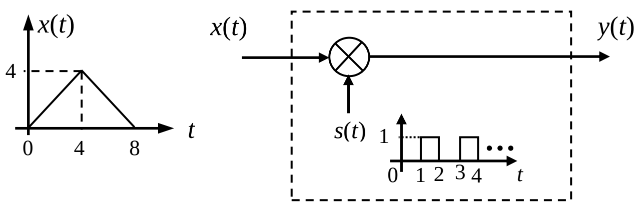
i(t) es la entrada
v(t) es la salida

Invariancia en el tiempo

12) Se ingresa con una señal $x(t)$ y se obtiene una salida $y_1(t)$, luego se ingresa con la misma señal pero desplazada en T segundos, $x(t-T)$, y se obtiene una salida $y_2(t)$. Según las señales $y_1(t)$ e $y_2(t)$ mostradas, ¿el sistema es invariante en el tiempo? Justifique.



13) Se ingresa al siguiente sistema con la señal $x(t)$ mostrada en la figura. El sistema consta de un multiplicador y una señal interna $s(t)$ periódica de período T=2. Se pide:

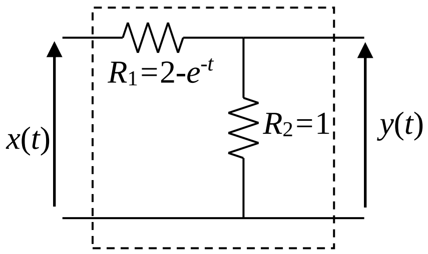


a) Graficar la salida $y(t)$ para la entrada $x(t)$ mostrada.
b) Graficar la salida $y(t)$ si se desplaza la misma señal $x(t)$ en 3 s, es decir, la entrada es $x(t-3)$.
c) Comparar los gráficos de los incisos a) y b). ¿El sistema es invariante en el tiempo? Justifique.

14) Dados los siguientes sistemas indique por observación si son o no invariantes en el tiempo. Justifique.

a) $y''(t) + 9y'(t) + y(t) = x(t)$ b) $2\cos(t)y`(t) + 5y(t) = 0$

c)



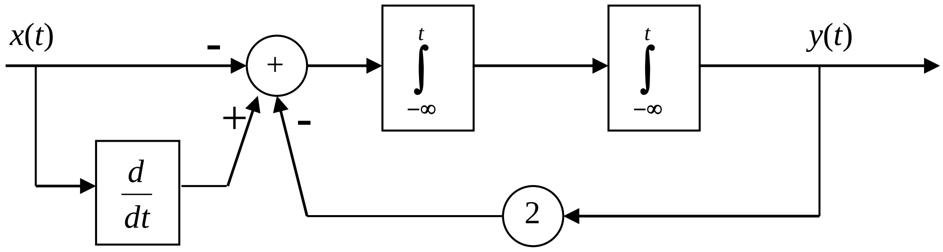
Respuesta temporal. Respuesta al impulso. Convolución

15) Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales que representan sistemas lineales e invariantes en el tiempo, y las condiciones iniciales especificadas a continuación, hallar las respuestas homogénea y total del sistema cuando la entrada es la indicada en cada caso:

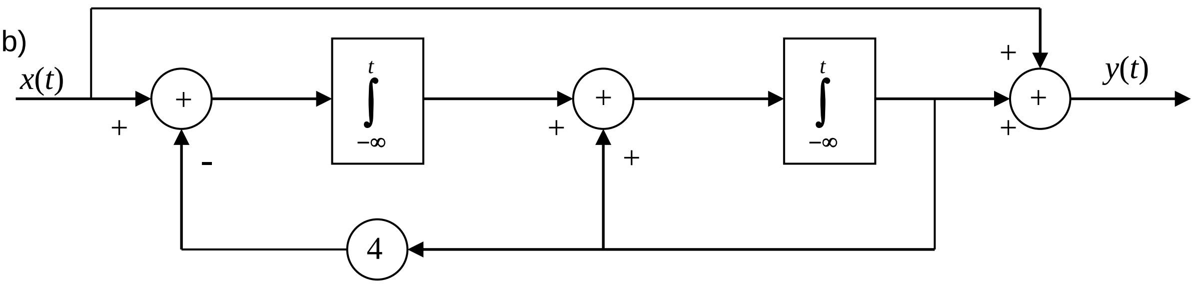
a) $(D^2+8D+15)\,y(t) = x(t)$ con $y(0)=2$ $y'(0) = -12$ $x(t)=\cos(t)$
b) $(D^3+3D^2+2D)\,y(t) = x(t)$ con $y(0)= y'(0) = 0$ $y''(0)= -3/2$ $x(t)=e^{-3t}$
c) $(4D+1)\,y(t) = x(t)$ con $y(0) = 0$ $x(t)=3$
d) Obtenga los diagramas en bloques de los sistemas b) y c).

16) Encuentre la ecuación diferencial de los sistemas LIT representados por los diagramas en bloques siguientes:

a)

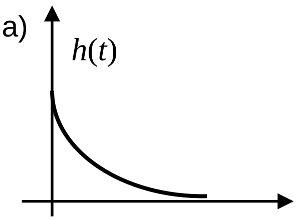


b)

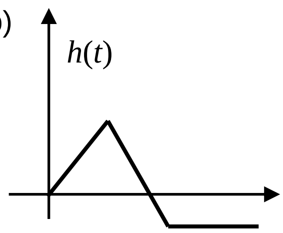


17) Observe los siguientes gráficos de respuestas al impulso de sistemas lineales y diga qué sistemas son estables y cuáles no. Justifique.

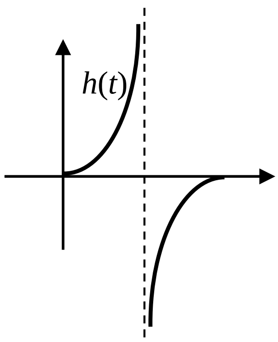
a)

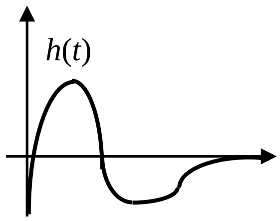


b)



c)





18) Calcular las siguientes convoluciones :

a) $u_s(t) * e^t\, u_s(t)$ b) $e^t\, u_s(t) * e^{3t}\, u_s(t)$ c) $f(t) * \delta(t - t_0)$

d) $\mathrm{sen}(2t) u_s(t) * e^{-t}\, u_s(t)$ e) $\mathrm{sen}(2t) u_s(t) * \cos(3\pi t)\, u_s(t)$

19) Halle el resultado de la siguiente convolución:

$$y(t) = P_4(t-2) * e^t\, u_s(t)$$

Puede usar el resultado de lo hallado en 18.a) recordando que $P_4(t-2) = u_s(t) - u_s(t-4)$.

20) Hallar la función operacional, $H(D)$, y la respuesta al impulso de los sistemas representados por las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(D^2 + 6D + 10)\; y(t) = x(t)$

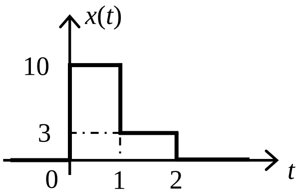
b) $(2D^2 + 4D - 16)\; y(t) = x(t)$

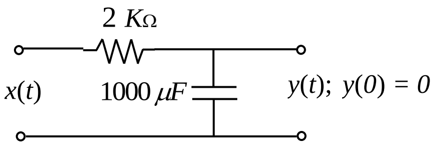
c) $(D^3 + 6D^2 + 12D + 8)\; y(t) = (D-1)\; x(t)$

d) $(D^2 + 4D + 5)\; y(t) = (D^2 - 1)\; x(t)$

Analizar la estabilidad de cada uno observando las raíces de la ecuación característica y también integrando la respuesta al impulso.

21) Dado el siguiente sistema:





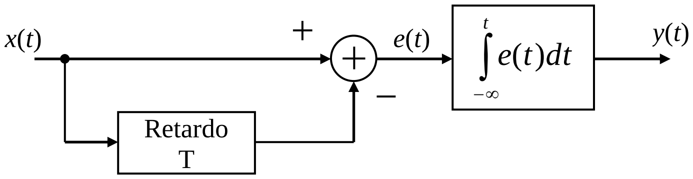
1 KΩ = 1000 Ω (Ohms)
1 μF = 10^{-6} F (Faradios)
Ohms x Faradios = segundos

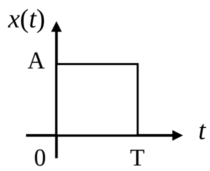
Se pide lo siguiente:

a) Halle la ecuación diferencial que representa al sistema y a partir de ella dibuje un diagrama en bloques del mismo.
b) Determine la respuesta al impulso del sistema, $h(t)$. ¿Qué valor debe tener el coeficiente que acompaña a la derivada de mayor orden en la ecuación diferencial para calcular la $h(t)$?
c) Halle la respuesta al escalón.
d) Encuentre, utilizando lo hallado en c), la salida debida a la entrada $x(t)$ mostrada arriba con condiciones iniciales nulas. Recuerde que esta es la denominada **solución forzada**.
e) ¿La convolución contempla el hecho de tener condiciones iniciales distintas de cero? ¿Cómo se modifica la respuesta calculada en el inciso anterior si $y(0) = 5\text{V}$. [Aplique superposición]
f) ¿Qué nombre recibe la respuesta que se sumó a la forzada para obtener la solución total del inciso d)?

22) Dado el sistema definido mediante el siguiente diagrama en bloques:

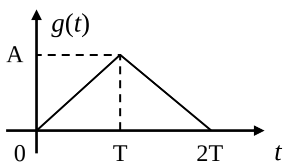
a) Calcule la respuesta al impulso en forma directa, es decir, colocando una $\delta(t)$ en la entrada.
b) Calcule y grafique la respuesta para la entrada $x(t)$ que se muestra debajo considerando condiciones iniciales nulas. La respuesta que se pide ¿es la forzada o la particular?





23) La respuesta al escalón de un sistema, es la señal $g(t)$ que se muestra.

a) ¿Qué relación hay entre la respuesta al impulso y la respuesta al escalón?
b) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ a partir de la $g(t)$.Grafique $h(t)$.
c) Calcule y grafique la respuesta a la entrada $x(t) = u_s(t) - u_s(t - \text{T})$ [Use la $g(t)$]

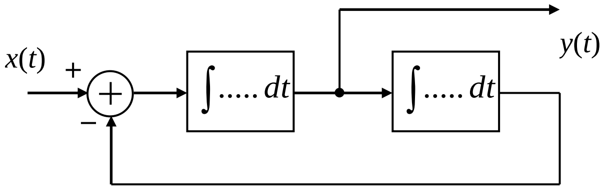


24) Emplee la función respuesta al impulso para expresar la salida del sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial a una $x(t)$ causal cualquiera. El sistema tiene energía almacenada (condiciones iniciales NO nulas).

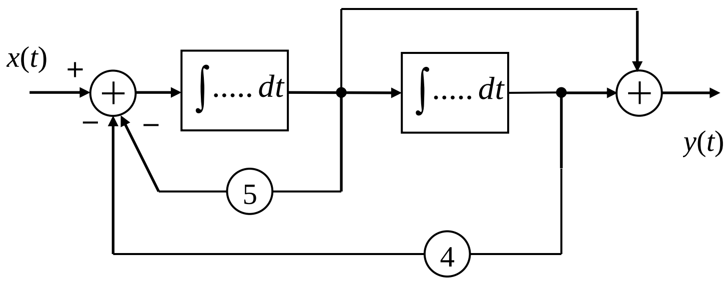
$$(D^2 + \omega_o^2)y(t) = x(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad y(0) = 8 \quad , \quad y'(0) = 0$$

25) Dados los diagramas en bloque de las siguientes figuras:

I)

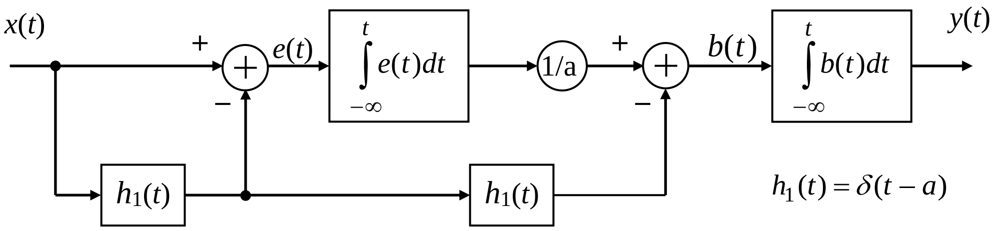


II)



a) Encuentre la ecuación diferencial que modela al sistema.
b) Halle la respuesta al impulso del sistema.
c) Halle la respuesta al escalón usando la respuesta al impulso calculada en el inciso anterior.
d) Halle la respuesta en régimen permanente utilizando la función operacional para:
- Sistema I: $x(t)=e^{\,j2t}$.
- Sistema II: $x(t)=\text{sen}(3t)$.
e) Verifique el resultado del inciso anterior utilizando el método de los coeficientes indeterminados (ver Ej. 15).
Nota: para el inciso a) use el operador D.

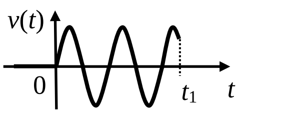
26) Dado el diagrama en bloques de la figura:



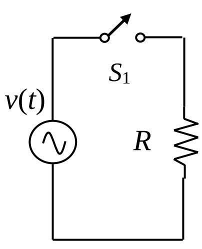
a) Encuentre en forma directa la respuesta al impulso del sistema.

b) Encuentre la respuesta del sistema a la función rampa unitaria.

27) En el circuito siguiente se conecta un generador de tensión de onda senoidal durante un tiempo t_1 y luego se desconecta. Se pide lo siguiente:

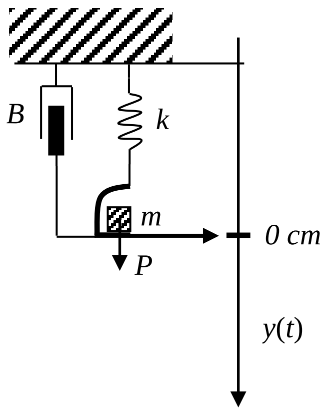


$$v(t) = V_P\,\text{sen}(\omega_0\, t)u_s(t)$$



a) Encuentre la expresión de la energía absorbida por la resistencia en función del tiempo t_1.
b) Calcule la potencia media (P_m) como el cociente de la energía consumida en t_1 segundos y ese tiempo t_1.
c) Grafique la Potencia media en función de $\omega_0 t_1$ y diga a que valor tiende cuando $\omega_0 t_1 \to \infty$.
d) Calcule ahora la potencia media en un sólo período y compare con lo calculado en c).

28) La figura muestra el esquema básico de una balanza. La misma está compuesta por un resorte, un amortiguador y una bandeja donde se coloca el peso a determinar, y adosada a ésta una aguja indicadora del peso sobre el eje “y”.



Al colocar la masa m la bandeja se desplaza una distancia $y(t)$. El comportamiento del sistema es gobernado por la siguiente ecuación diferencial:

$$(M+m)y''(t)+B\,y'(t)+k\,y(t)=mg\ ,$$

donde M=1 Kg es la masa de la bandeja y todo lo que se mueve con la aguja indicadora.

m=5 Kg es la masa a pesar.

B=40 Kg/s es la constante del amortiguador.

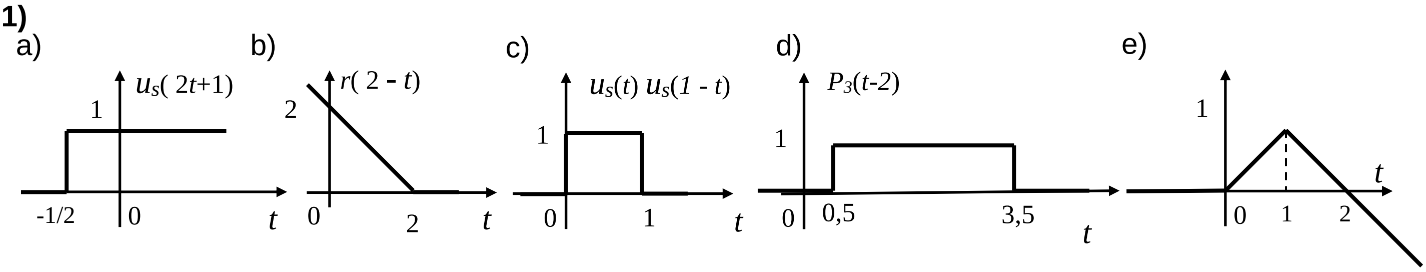
k=980 Kg/s^2 es la constante del resorte.

g=9,8 m/s^2 gravedad.

Resuelva la ecuación diferencial y grafique en forma aproximada la respuesta $y(t)$. Considere $y(0)=y'(0)=0$. Identifique los regímenes transitorio y permanente.

Matemática Avanzada
TRABAJO PRÁCTICO Nº 2
Respuestas a los ejercicios

1)



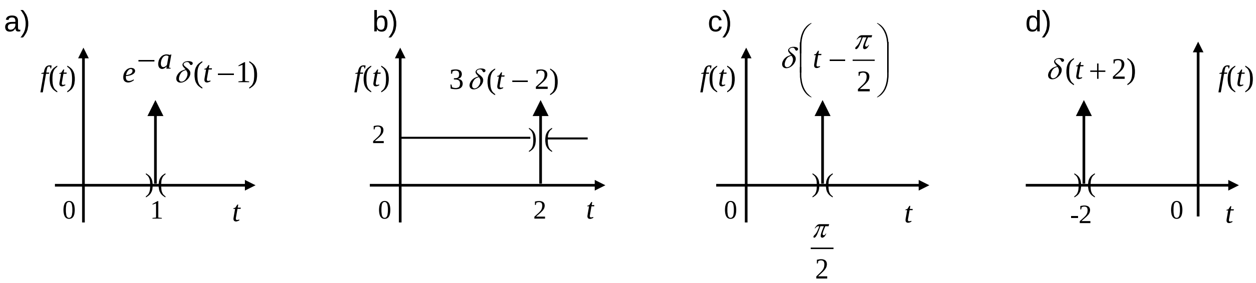
2)

a) $x(t)$ = 4 $r(t+1)\,u_s(-t)$ + $4r(1-t)\,u_s(t)$ = $4r(t+1)$-$8r(t)$+$4r(t-1)$

b) $x(t)$ = 2 $u_s(t+1)$ – 3 $u_s(t-1)$ +$u_s(t-2)$

c) $x(t)$ = 3 $r(t+1)\,u_s(-t)$– $3r(1-t)\,u_s(t)$

3)



4) a) $\cos(\omega)$ b) 2 c) $e^{-4}\delta(t-2)$ d) -12 e) $-\omega^2\cos(\omega)$

5) a) T=1/10 s ω_0=20π rad/s f_0=10 Hz
b) T=1/2 s ω_0=4π rad/s f_0=2 Hz
c) $z(t)$ es no periódica.

6) a) x_1 par; x_2 impar; x_3 par; x_4 impar.
b) i) par
ii) impar
iii) par

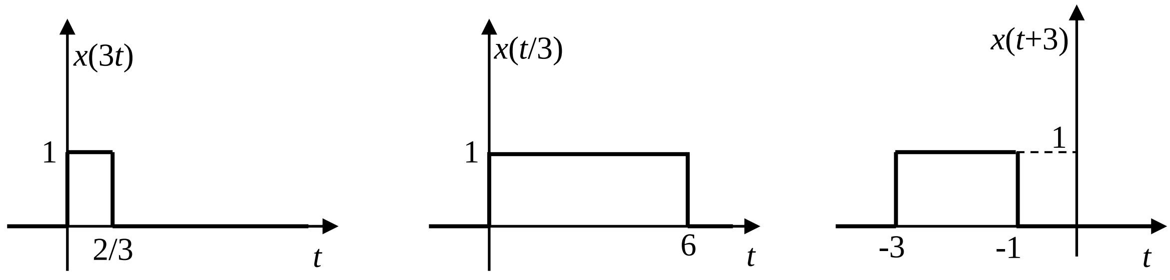
8) a) $\begin{cases} E=2 \\ P_m=1 \end{cases}$ *señal de Energía* b) $\begin{cases} E=\infty \\ P_m=1 \end{cases}$ *señal de Potencia*

c) $\begin{cases} E=\infty \\ P_m=\infty \end{cases}$ *señal de Orden Superior* d) $\begin{cases} E=\infty \\ P_m=Vp^2/2 \end{cases}$ *señal de Potencia*

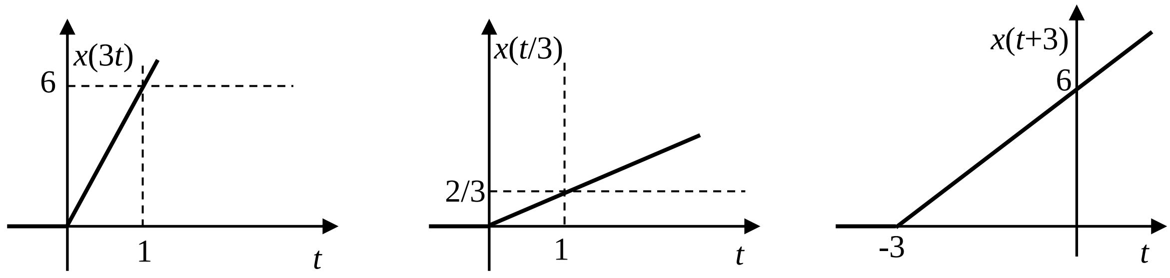
9) a) 2.b) $y(t)=\begin{cases} 0 & t<-1 \\ 2t+2 & -1\le t<1 \\ 5-t & 1\le t<2 \\ 3 & t\ge 2 \end{cases}$ Señal de potencia

2.c) $y(t)=\begin{cases} 0 & t<-1 \\ 3\left(\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}\right) & -1\le t<0 \\ 3\left(\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}\right) & 0\le t<1 \\ 0 & t\ge 1 \end{cases}$ Señal de energía

b) 8.a)



8.c)



10) a) y e) son lineales, los demás son no lineales.

11) a) sin memoria, los demás con memoria.

12) Variante en el tiempo.
13) c) variante en el tiempo.

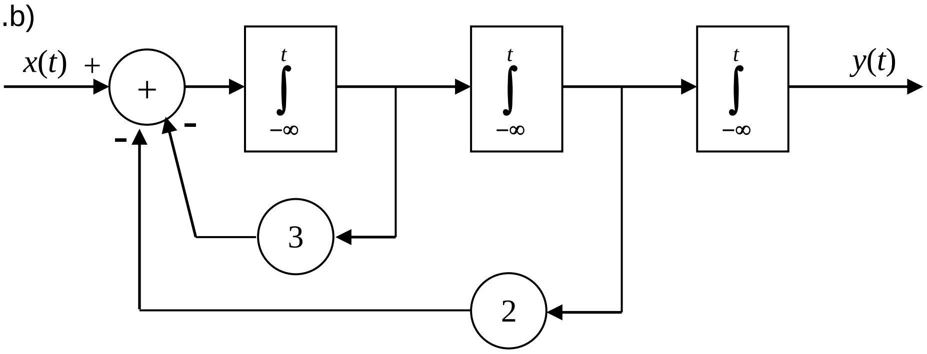
14) a) invariante, b) y c) variante en el tiempo.

15) a) $y_h(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-5t}$ $\qquad y(t) = -\frac{299}{260}e^{-3t} + \frac{805}{260}e^{-5t} + \frac{7}{130}\cos(t) + \frac{4}{130}\mathrm{sen}(t)$

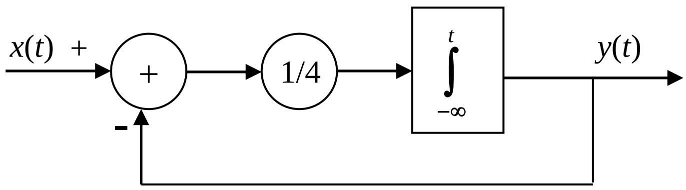
b) $y_h(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t}$ $\qquad y(t) = -\frac{7}{12} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$

c) $y_h(t) = c_1 e^{-t/4}$ $\qquad y(t) = (3 - 3e^{-t/4})u_s(t)$

d) 16.b)



16.c)



16) a) $y''(t) + 2y(t) = x'(t) - x(t)$

b) $y''(t) - y'(t) + 4y(t) = x''(t) - x'(t) + 5x(t)$

17) a) y d) estables; b) y c) inestables.

18) a) $(e^t - 1)\,u_s(t)$ $\qquad$ b) $\frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)\,u_s(t)$ $\qquad$ c) $f(t - t_0)$

d) $\frac{1}{5}\left(2e^{-t}-2\cos(2t)+\text{sen}(2t)\right)u_s(t)$ e) $\frac{2}{5}\left(\cos(2t)-\cos(3t)\right)u_s(t)$

19) $y(t)=\left(1-e^{t}\right)u_s(t)-\left(1-e^{t-4}\right)u_s(t-4)$

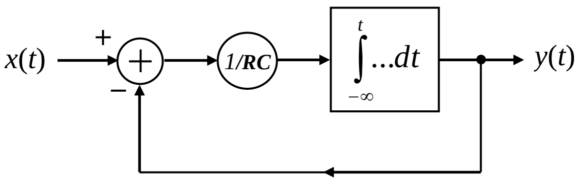
20) a) $H(D)=\dfrac{1}{D^2+6D+10}$, $h(t)=e^{-3t}\text{sen}(t)u_s(t)$, estable.

b) $H(D)=\dfrac{1}{2D^2+4D-16}$, $h(t)=\frac{1}{12}(e^{2t}-e^{-4t})\,u_s(t)$, inestable.

c) $H(D)=\dfrac{D-1}{D^3+6D^2+12D+8}$, $h(t)=(t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t}\,u_s(t)$, estable.

d) $H(D)=\dfrac{D^2-1}{D^2+4D+5}$, $h(t)=e^{-2t}\left(2\text{sen}(t)-4\cos(t)\right)u_s(t)+\delta(t)$, estable.

21)

a) 

b) $h(t)=\frac{1}{2}e^{-0.5t}u_s(t)$

c) Respuesta al escalón: $g(t)=\left(1-e^{-t/2}\right)u_s(t)$

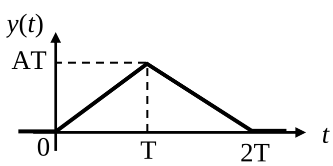
d) $y_f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 10\left(1-e^{-t/2}\right) & 0\le t<1\\ 3+1.5410\,e^{-t/2} & 1\le t<2\\ 9.6959\,e^{-t/2} & t\ge 2\end{cases}$

Esta solución puede hallarse por convolución de la entrada con la respuesta al impulso o, a partir de la respuesta al escalón, considerando la entrada como una suma de escalones de diferentes alturas y aplicando superposición.

e) $y(t)=5e^{-0.5t}u_s(t)+y_f(t)$

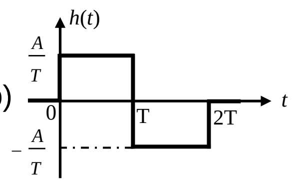
22) a) $h(t)=u_s(t)-u_s(t-T)$

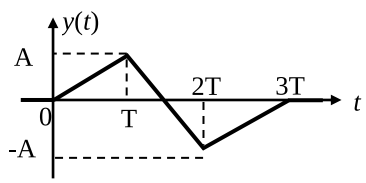
b) Respuesta forzada $y(t)=\begin{cases}At & si & 0\le t\le T\\ A(2T-t) & si & T\le t\le 2T\\ 0 & otro & valor\end{cases}$



23)

a) $h(t)=\dfrac{d\,g(t)}{d\,t}$

b) 

c) 

24) $y(t)=8\cos(\omega_o\,t)\,u_s(t)+\int_0^t \frac{1}{\omega_o}\text{sen}\left(\omega_o(t-\lambda)\right)x(\lambda)\,d\lambda$

25) **I)**

a) $y'' + y = x'$

b) $h(t) = \cos(t)\, u_s(t)$

c) $g(t) = \text{sen}(t)\, u_s(t)$

d) $y_p(t) = -\dfrac{2j}{3} e^{2jt}$

II)

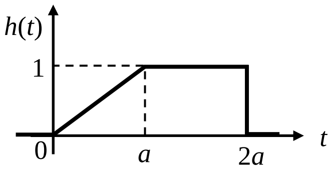
a) $y'' + 5y' + 4y = x' + x$

b) $h(t) = e^{-4t} u_s(t)$

c) $g(t) = \dfrac{1}{4}(1 - e^{-4t})\, u_s(t)$

d) $y_p(t) = \dfrac{4}{25}\text{sen}(3t) - \dfrac{3}{25}\cos(3t)$

26)



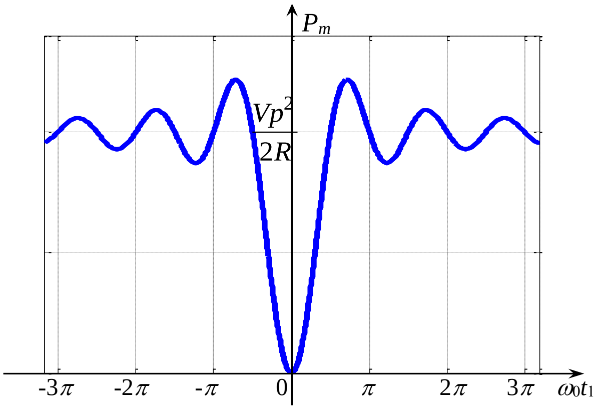
27)

a) $E = \dfrac{V_p^{\,2}}{2R} t_1\, [1 - \text{sinc}\,(2\omega_0\, t_1)]$

b) $P_m = \dfrac{V_p^{\,2}}{2R} [1 - \text{sinc}\,(2\omega_0\, t_1)]$

c) $P_m \to \dfrac{V_p^{\,2}}{2R}$

d) $P_m = \dfrac{V_p^{\,2}}{2R}$



28)

$$y(t) = \frac{m\,g}{k}\left(1 - e^{-\alpha\, t}[\cos(\beta\, t) + \frac{\alpha}{\beta}\text{sen}(\beta\, t)]\right) u_s(t)$$

con $\alpha = \dfrac{B}{2(m+M)}$ $\qquad \beta = \dfrac{\sqrt{\left|B^2 - 4(m+M)k\right|}}{2(m+M)}$