MATEMÁTICA AVANZADA
TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

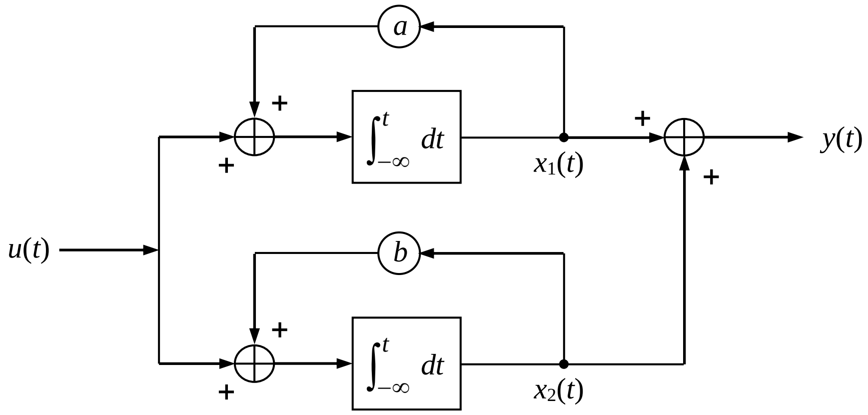
Variable de Estado

1) Convierta las siguientes ecuaciones diferenciales en sistemas de ecuaciones de variable de estado, tomando como $x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t) \; .... \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$

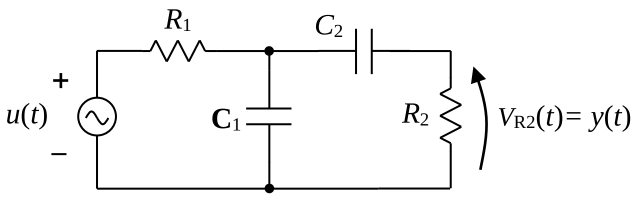
a) $y'''(t) + 2y''(t) + 3y'(t) + y(t) = m(t)$ b) $y'''(t) + 5y'(t) = q(t)$

2) Escriba las ecuaciones de variable de estado para cada uno de los siguientes sistemas considerando que u(t) e y(t) son la entrada y la salida respectivamente en todos los casos.

a)

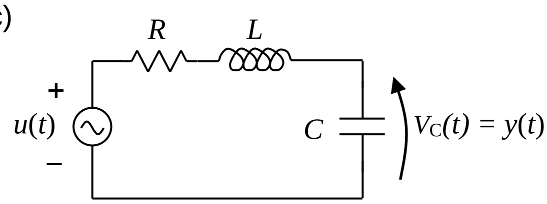


b)



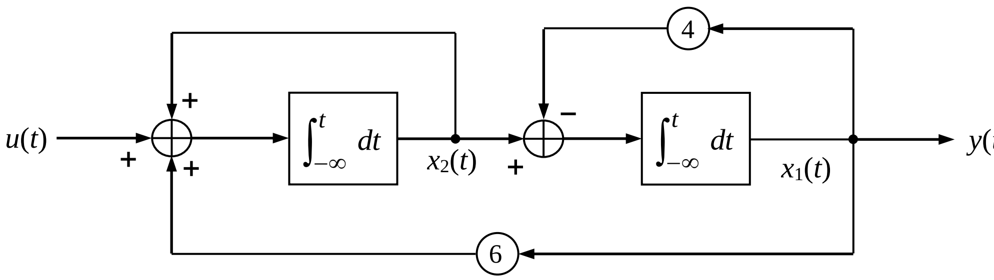
$V_{C1}(t) = x_1(t) \quad V_{C2}(t) = x_2(t)$

c)



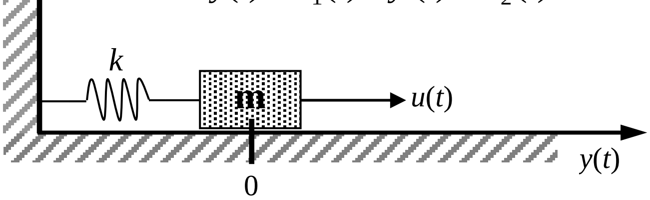
$V_C(t) = x_1(t) \quad V_R(t) = x_2(t)$

d)



e)

$y(t) = x_1(t) \quad y'(t) = x_2(t)$



Plantee la ecuación diferencial si se aparta la masa de su posición de reposo y luego se suelta

Recuerde: $\sum F = m.a$

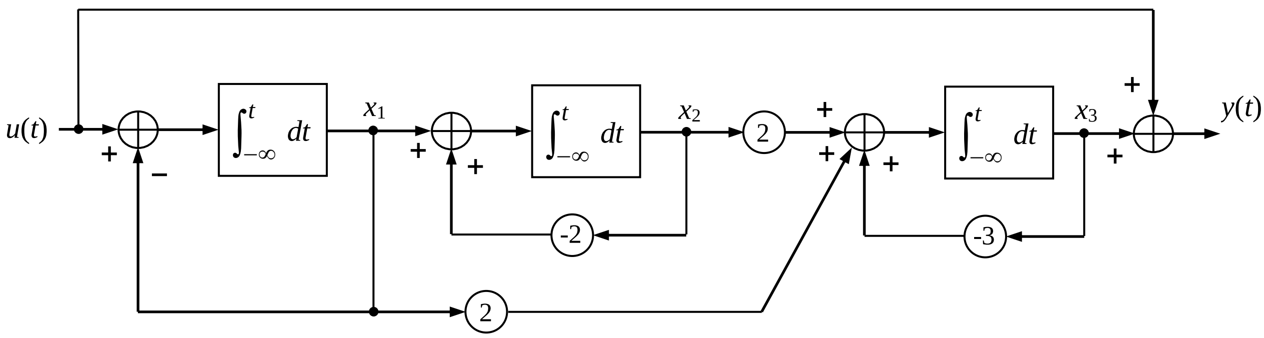
$u(t)$ es una fuerza.

3) Encontrar la expresión de e^{At} para cada una de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

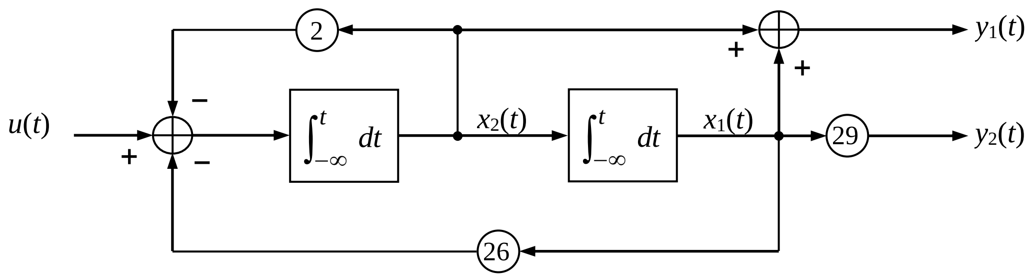
4) Para el diagrama en bloques mostrado en la figura, hallar:

a) Las matrices A, B, C, D de la descripción con variable de estado.
b) La matriz e^{At}.
c) La respuesta al impulso, $h(t)$. ¿Es de esperar una $\delta(t)$ en $h(t)$?. Justifique.
d) La respuesta al escalón, $g(t)$.
e) La solución libre del vector de estados, $x_l(t)$, cuando las condiciones iniciales de los estados son: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ y $x_3(0) = 3$.
f) La respuesta libre del sistema a las condiciones iniciales del inciso anterior.
g) La respuesta del sistema para $u(t) = \cos(2t)\, u_s(t)$ con las condiciones iniciales dadas en el inciso e)



5) Para el diagrama en bloques mostrado en la figura, hallar:

a) Las matrices A, B, C y D de la descripción con variable de estado.
b) La matriz e^{At}.
c) La solución libre del vector de estados, $x_l(t)$, cuando las condiciones iniciales para los estados son: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 5$.
d) La salida, $y_l(t)$, en respuesta a las condiciones iniciales del inciso anterior.
e)



6) Para el diagrama en bloques del ejercicio 24. I) de la guía 2 de sistemas lineales:

a) Encuentre las ecuaciones de variable de estado
b) Repita el inciso b) del mencionado ejercicio usando el modelo en VE.

7) Considere los ejercicios 2.c) y 2.d)

a) Encuentre un nuevo modelo en variable de estados considerando la transformación dada por:

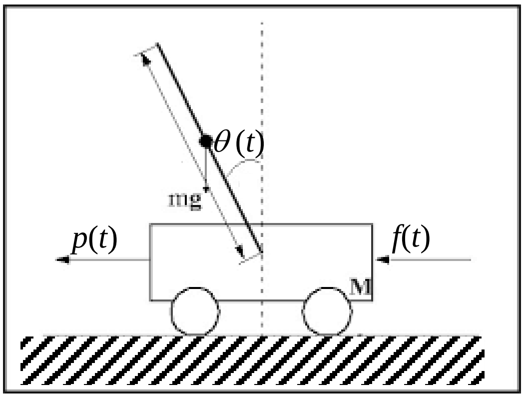
$$v_1(t) = x_1(t) - x_2(t)$$
$$v_2(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

b) Para 2.d) halle la transformación por autovalores.

Ejercicio propuesto:

El carrito con péndulo invertido de la figura está impulsado por una fuerza $f(t)$. Para valores pequeños del ángulo $\theta(t)$ las ecuaciones diferenciales son:

$$\ddot{\theta}(t) = \theta(t) + f(t)$$
$$\ddot{p}(t) = a\theta(t) - f(t),$$



Donde la respuesta del sistema es $p(t)$, el desplazamiento horizontal.
Escriba un sistema en variables de estado tal que las variables de estado 1 y 3 sean: $x_1(t)=\theta(t)$; $x_3(t)=p(t)$.

MATEMÁTICA AVANZADA
TRABAJO PRÁCTICO N^{O} 3
Respuesta a los Ejercicios

1) a) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}m(t) \qquad y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}q(t) \qquad y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

2)

a) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{R_pC_1} & \dfrac{1}{R_2C_1}\\ \dfrac{1}{R_2C_2} & -\dfrac{1}{R_2C_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{R_1C_1}\\ 0\end{pmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \qquad Rp=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

c) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{RC}\\ -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{R}{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{R}{L}\end{pmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

e) $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{m}\end{pmatrix}u(t) \qquad y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

3)

a) $$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{3t} & 0\\ e^{3t}-e^{2t} & e^{2t}\end{bmatrix}$$

b) $$e^{At}=e^{-t}\begin{bmatrix}\cos(t) & -\operatorname{sen}(t)\\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t)\end{bmatrix}$$

c) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 2(e^{-t}-e^{-2t}) & e^{-2t} & 0 \\ e^{-t}-e^{-2t} & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

d) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{8t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-7t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

4)

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D = 1$

b) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ e^{-t}-e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ 2(e^{-t}-e^{-2t}) & 2(e^{-2t}-e^{-3t}) & e^{-3t} \end{bmatrix}$

c) $h(t) = 2(e^{-t}-e^{-2t})\,u_s(t) + \delta(t)$

d) $g(t) = (2 + e^{-2t} - 2e^{-t})\,u_s(t)$

e) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t}+e^{-3t} \end{pmatrix} u_s(t)$

f) $yl(t) = (2e^{-t} + e^{-3t})u_s(t)$

g) $y(t) = \left[\frac{8}{5}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-3t} + \frac{1}{10}(\,3\,\mathrm{sen}\,(2t) + 9\cos(2t)\,)\right] u_s(t)$

5)

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -26 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 29 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(5t) + \frac{1}{5}\mathrm{sen}(5t) & \frac{1}{5}\mathrm{sen}(5t) \\ -\frac{26}{5}\mathrm{sen}(5t) & \cos(5t) - \frac{1}{5}\mathrm{sen}(5t) \end{bmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x_{l1} \\ x_{l2} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(5t) + \frac{6}{5}\mathrm{sen}(5t) \\ 5\cos(5t) - \frac{31}{5}\mathrm{sen}(5t) \end{pmatrix} u_s(t)$

d) $\begin{pmatrix} y_{l1} \\ y_{l2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6\cos(5t) - 5\,\mathrm{sen}(5t))e^{-t} \\ \left(29\cos(5t) + \frac{174}{5}\mathrm{sen}(5t)\right)e^{-t} \end{pmatrix} u_s(t)$

e) $$\begin{pmatrix} y_{f1} \\ y_{f2} \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 1+\left(5\,\text{sen}(5t)-\cos(5t)\right)e^{-t} \\ 29-\frac{29}{5}\left(\text{sen}(5t)+5\cos(5t)\right)e^{-t} \end{pmatrix} u_s(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 1+\left(155\cos(5t)-125\,\text{sen}(5t)\right)e^{-t} \\ 29+\left(725\cos(5t)+899\,\text{sen}(5t)\right)e^{-t} \end{pmatrix} u_s(t)$$

6)

a) $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$ ó $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0)\,u(t) \qquad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0)\,u(t)$$

7) a)

2.c) $$A_v = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2RC} & \frac{R}{L}+\frac{1}{2RC} \\ -\frac{1}{2RC} & -\frac{R}{L}+\frac{1}{2RC} \end{bmatrix} \quad B_v = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} \\ \frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad C_v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad D_v=0$$

2.d) $$A_v = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B_v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad D_v=0$$

b) Considerando $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ (una de las infinitas posibilidades), las matrices transformadas son:

$$A_v = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad B_v = \begin{bmatrix} 1/7 \\ -1/7 \end{bmatrix} \quad C_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D_v=0$$

<u>Ejercicio propuesto</u>

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ \mathrm{D}=0$$