MATEMÁTICA AVANZADA
TRABAJO PRÁCTICO N° 4

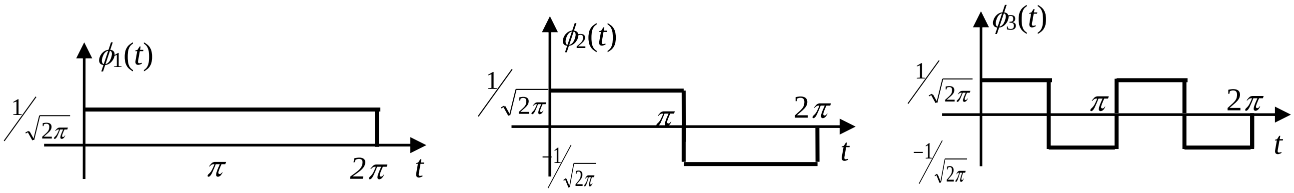
Serie y Transformada de Fourier

SERIE DE FOURIER

1) a) Demostrar que el conjunto B= $\left\{1, \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right\}$ es ortogonal en el intervalo $\left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

b) A partir de B, calcule B' ortonormal.

2) Considere el conjunto B={Φ_1, Φ_2, Φ_3}, donde las funciones se describen en los gráficos. Muestre que B es un conjunto ortonormal para $0 < t < 2\pi$.



3) Demuestre, a partir de la expresión general dada por $C_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2}$, que los coeficientes de la Serie de Fourier resultante cuando $\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}, \quad n \in Z$, en $-T/2 < t < T/2$, se calculan como

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt .$$

4) Dada la siguiente función periódica:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \le t \le 1/2 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases} \qquad x(t) = x(t+2) \quad \forall\, t$$

a) Dibuje al menos 3 períodos de $x(t)$ y calcule por definición los coeficientes de la serie exponencial de Fourier, c_n.

b) Repita el cálculo propuesto en a) para la señal $v(t)$ dada por

$$v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases} \qquad v(t) = v(t+2) \quad \forall\, t$$

c) Observe que $v(t)=x(t-1/2)$. Demuestre que la relación entre los coeficientes de $x(t)$ y $v(t)$ está dada por:

$$c_n^{\,v} = c_n^{\,x} e^{-jt_0 n\omega_0} \text{ con } t_0 = 1/2.$$

d) Encuentre para $v(t)$ la expresión de la serie trigonométrica calculando a_n y b_n por definición.

5) Dadas las siguientes series de Fourier

$$x(t) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2+1}\cos(10\,n\pi\, t) + \frac{9}{n}\operatorname{sen}(10\,n\pi\, t)$$

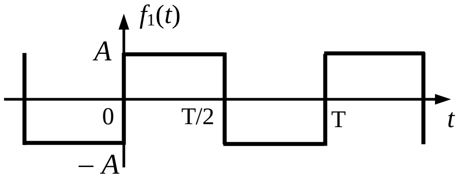
$$y(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{3}{n^2 + j3n} e^{jn2\pi t} \qquad n \neq 0$$

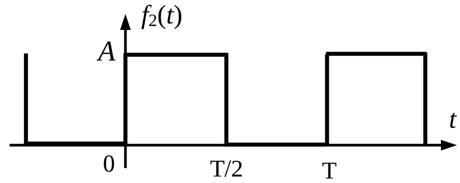
$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{jn\pi t}$$

a) Encuentre el valor medio, el período y la frecuencia fundamental.
b) Determine la expresión de los coeficientes a_n , b_n y c_n.
c) Halle la expresión temporal de la tercera armónica.
d) Encuentre y grafique en dos gráficos separados la amplitud y la fase de los coeficientes de la serie exponencial hasta n=5.

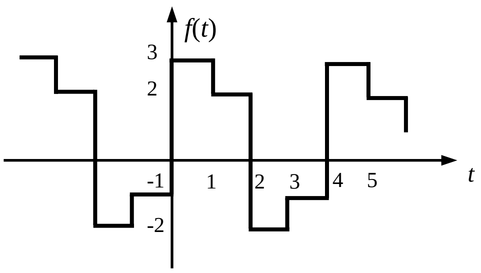
6) Dada $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0\, t) + b_n\, sen(n\omega_0\, t)$, obtenga la expresión de $g(t) = \int_{t_0}^{t} f(\lambda)\, d\lambda$.

a) Una vez obtenida $g(t)$, diga cuál es la condición que debe cumplir $f(t)$ para que $g(t)$ sea periódica.
b) Obtenga gráficamente $g(t)$ para las señales mostradas a continuación integrando al menos un par de períodos. Tome t_o=0. Observe las formas de onda en ambos casos y vea si se cumple lo hallado en a)





7) Si el desarrollo de Fourier de la señal mostrada es: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n\, sen(n\omega_0 t)$, una <u>suma de funciones continuas</u> y en el gráfico se ven varias discontinuidades, entonces:

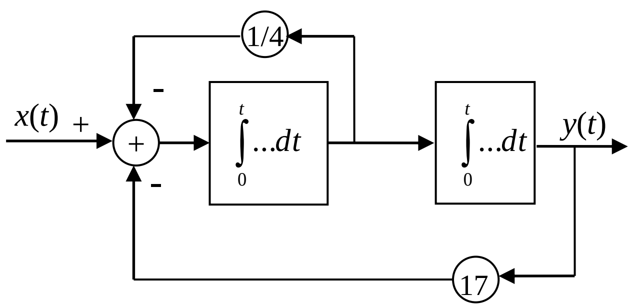


a) ¿Qué valores tomará la serie de Fourier en esas discontinuidades? Analizar sólo para $0 \leq t < 4$

b) ¿Cómo deberíamos definir la señal $f(t)$ para que la serie converja a $f(t)$ en todos los puntos?

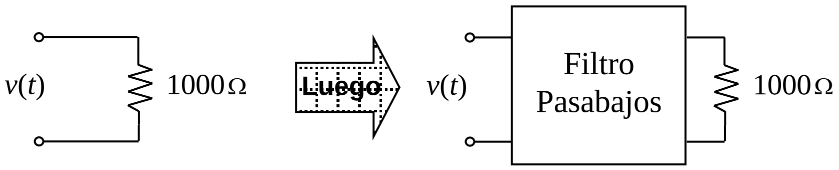
8) La señal periódica $x(t)$ ingresa al sistema mostrado abajo. Calcule la expresión de la cuarta armónica de la salida $y(t)$ <u>*en régimen permanente*</u>.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j}{n} e^{jnt} \qquad n \neq 0$$



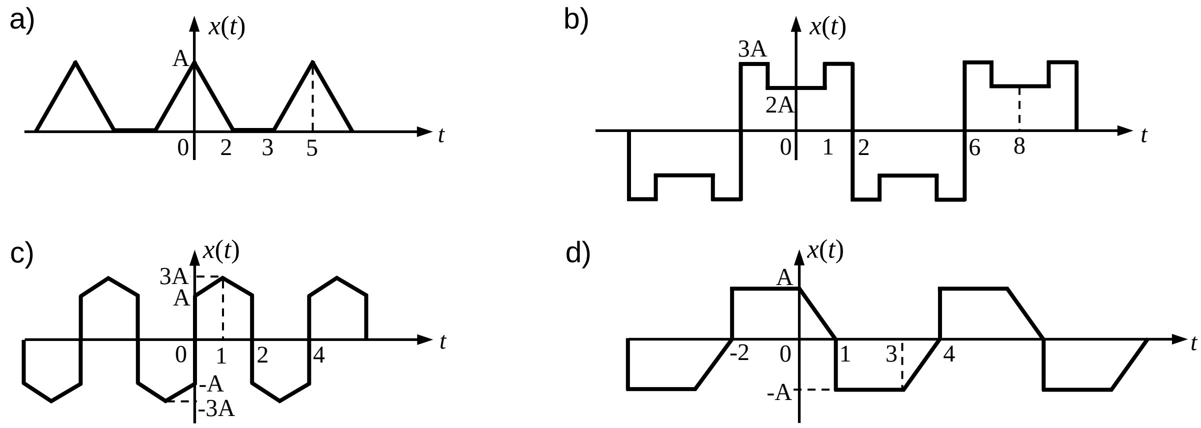
9) En un primer momento se aplica la señal $v(t)$ del ejercicio **4)**, a una resistencia de 1000 Ohms. Luego se intercala entre la señal $v(t)$ y la resistencia, un sistema lineal llamado filtro pasabajos que sólo deja pasar los armónicos de $v(t)$ de frecuencias menores a 2 Hz.

En ese sistema lineal $H(D = jn\omega_0) = \begin{cases} 1 & |n\omega_0| \le 2\pi 2 \\ 0 & |n\omega_0| > 2\pi 2 \end{cases}$

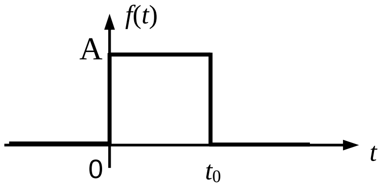


Encuentre la potencia disipada en la resistencia en el caso en que no está colocado el filtro y cuando sí está el filtro pasabajos.
Antes de hacer los cálculos: según el Teorema de Parseval, ¿cómo será la potencia en la resistencia con el filtro intercalado respecto de la potencia sin filtro?, ¿menor, mayor o igual?

10) Determine si las siguientes señales periódicas presentan simetrías par, impar y/o de media onda e indique **(<u>sin resolver</u>)** las expresiones de a_n y b_n para cada caso.



11) Obtenga una extensión periódica para el pulso que se muestra en la figura de modo de:

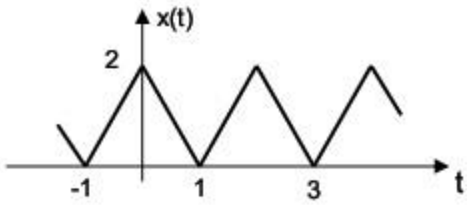


a) Expresar a $f(t)$ como una combinación lineal de funciones seno de frecuencia fundamental $f_0 = 1/T = 1/\,2t_0$.
b) Expresar a $f(t)$ como una combinación lineal de funciones coseno de frecuencia fundamental $f_0 = 1/T = 1/\,3t_0$.

Halle los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier en ambos casos.

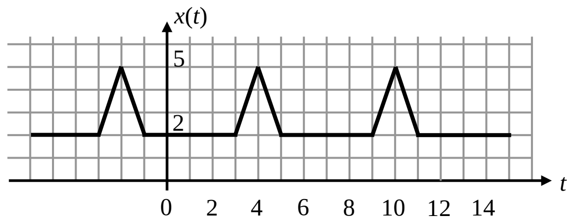
12) Reconsidere las funciones del ejercicio 4. Halle la amplitud y la fase de la tercera armónica y observe la relación de los valores encontrados con lo hallado en el inciso c) de dicho ejercicio.

13) Dada la señal mostrada en la siguiente figura:



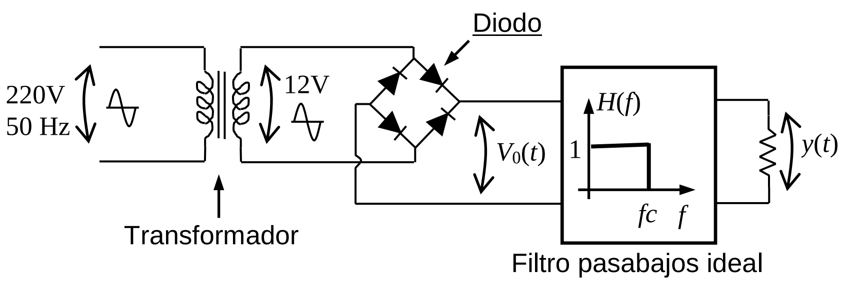
a) Halle la serie trigonométrica de Fourier de $x(t)$.
b) Encuentre la potencia media de $x(t)$.
c) Halle la potencia media de la serie hasta el primer armónico inclusive.
d) Calcule el error cuadrático medio que se comete al aproximar la función hasta el primer armónico inclusive.
e) Calcule que porcentaje de potencia se pierde al aproximar $x(t)$ por su serie hasta el primer armónico.

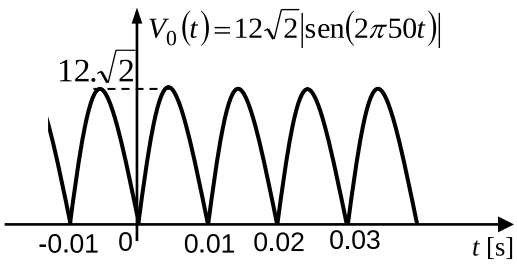
14) Calcule la serie trigonométrica de Fourier de $x(t)$. Para ello, previamente, defina una señal $v(t)$ desplazando la señal $x(t)$ en el eje de las ordenadas y de las abscisas, de modo de facilitar el cálculo utilizando simetría. Luego:



a) Obtenga la representación en serie exponencial de ambas señales (use los coeficientes de la serie trigonométrica ya calculados).
b) Obtenga las expresiones de los espectros discreto de amplitud y de fase. Grafíquelos y compárelos.
c) ¿Cuál es la separación entre barras de los espectros del inciso b)?

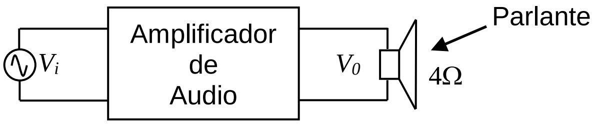
15) El siguiente circuito representa a un transformador que convierte la tensión de corriente alterna de 220 V, provista por la red domiciliaria, a 12 V. Luego, un puente de diodos convierte la onda senoidal de 12V a la tensión $V_0(t)$ de salida indicada en el gráfico, y por último, la señal $V_0(t)$ pasa por un filtro pasabajos ideal cuya salida es $y(t)$. Este circuito se utiliza para convertir corriente alterna en corriente continua de modo de alimentar dispositivos que normalmente usan pilas, tales como radios, televisores, reproductores mp3, etc.

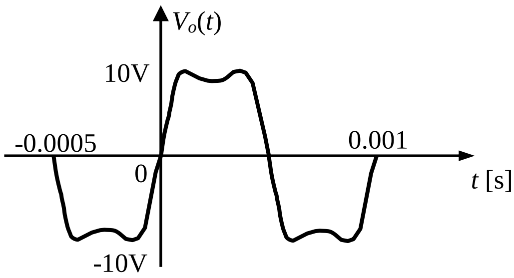




a) Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la tensión $V_0(t)$.
b) ¿Cuál es la frecuencia de la primera armónica de la tensión $V_0(t)$?
c) Determine la frecuencia de corte del filtro pasabajos (fc) de modo que a la salida sólo se obtenga la componente de corriente continua o armónica de frecuencia cero. ¿Qué valor tiene esa tensión de corriente continua?
d) Si $fc = 350$ Hz, obtenga la expresión temporal de la señal $y(t)$ [en régimen permanente].

16) Se ingresa a un amplificador de audio con una onda senoidal de 1 KHz y, debido a que el amplificador no es lineal, en lugar de obtener una onda senoidal pura en la salida (V_0) se obtiene la señal mostrada en la figura.





La señal $V_0(t)$ se puede representar mediante una serie de Fourier como la siguiente:

$$V_0(t) = 10\ \text{sen}(2\pi\ 1000\ t) + 4\ \text{sen}(2\pi\ 3000\ t) + 2\ \text{sen}(2\pi\ 5000\ t) + \text{sen}(2\pi\ 7000\ t)$$

Se pide:

a) Grafique el espectro de amplitud y el espectro de fase.

b) Calcule la potencia media de $V_0(t)$ sobre el parlante de 4 Ohms.

c) ¿Cuántos armónicos se necesitan para tener al menos el 90% de la potencia media de $V_0(t)$?

d) Calcule el porcentaje de distorsión armónica del amplificador (THD) con la fórmula que se da a continuación:

$$THD = 100.\sqrt{\frac{|C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2 + ...+ |C_m|^2}{|C_1|^2}},$$

donde los c_i son los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de la señal $V_0(t)$.

Observe que si no hubiese distorsión: $|C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2 + ...+ |C_m|^2 = 0$

17) Complete la siguiente tabla, donde se dan los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier hasta la tercera componente armónica. Grafique los espectros discretos de amplitud y fase utilizando la información que surge de la tabla.

n	C_n (forma cartesiana)	C_n (forma polar)	$\lvert c_n \rvert$	θ_n
0	0.7854			
1	-0.3183-j0.5			
-1	-0.3183+j0.5			
2	j0.25			
-2	-j0.25			
3	-0.0356-j0.1677			
-3	-0.0356+j0.1677			

18) Dada una señal $x(t)$ periódica. Demuestre que el espectro de amplitud de $x(t - t_o)$ es el mismo que el de $x(t)$ y que el espectro de fase de $x(t - t_0)$ es $\theta(n\omega_0) - n\omega_0 t_0$.

[Comience con la expresión de la serie exponencial de $x(t)$ y además: $C_n = |C_n|\ e^{j\theta(n\omega_0)}$]

19) Dadas las tres señales periódicas siguientes, iguales en potencia media y de valor medio cero, y sus correspondientes espectros de amplitud discretos. Se pide:

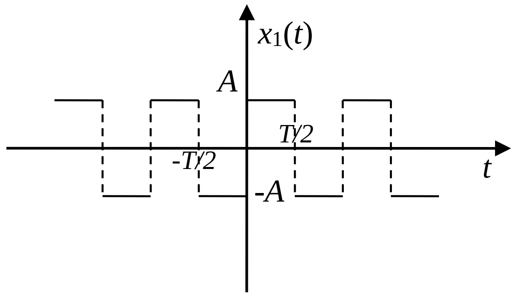
Observe los espectros discretos de las tres señales y responda:

a) ¿Cuál de los tres espectros tiene mayor contenido de alta frecuencia?

b) Observe la derivada en el origen de las tres señales en el tiempo. ¿Cuál de las tres señales varía más rápidamente en el tiempo?

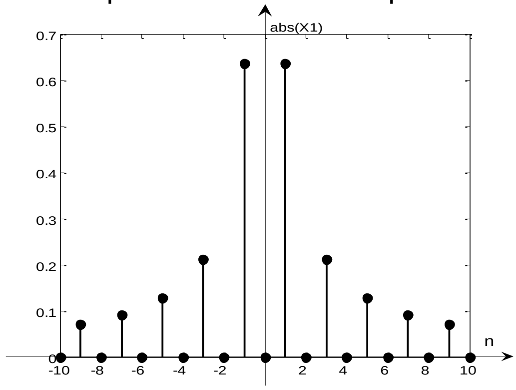
c) ¿Qué conclusión saca de lo respondido en a) y b)?

Señal



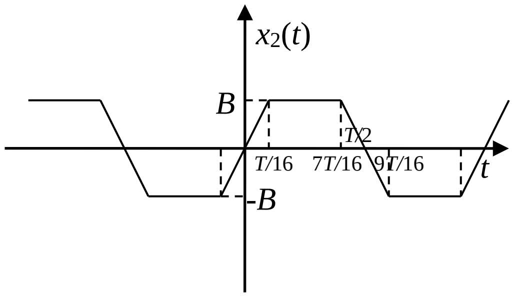
$A=1$

Espectro discreto de amplitud

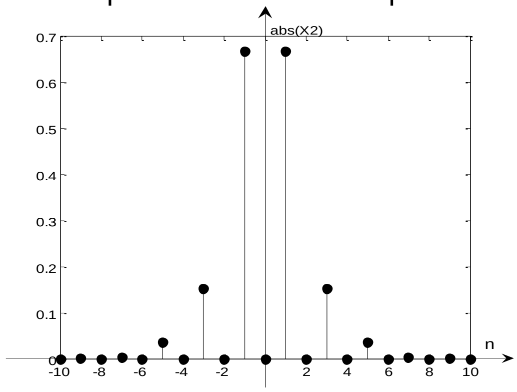


Señal

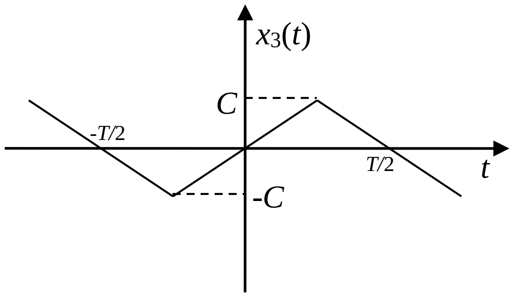
$B=\sqrt{6/5}\,A=\sqrt{6/5}$

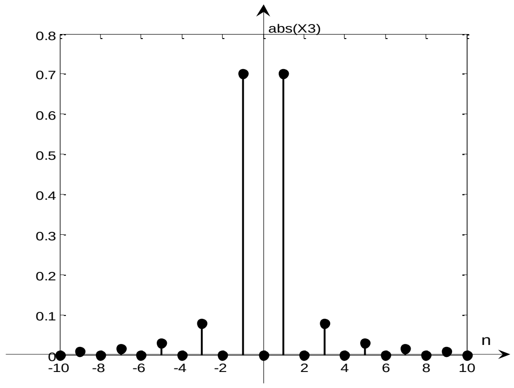


Espectro discreto de amplitud



$C=\sqrt{3}A=\sqrt{3}$





<u>TRANSFORMADA DE FOURIER</u>

20) Encuentre por definición la transformada de Fourier de

a) Un pulso triangular: $x_a(t)=T_{2b}(t)$.

b) $x_b(t)=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 1 & 1\le t\le 2 \\ 0 & \text{otros } t \end{cases}$

21) Mediante la definición de transformada de Fourier demuestre lo siguiente:

a) La transformada de Fourier de una señal par es una función real.
b) La transformada de Fourier de una señal impar es una función imaginaria.

22) Dadas las siguientes $F(\omega)$, grafique los espectros de amplitud y de fase.

a) $F(\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega RC}$ b) $F(\omega)=\mathrm{sinc}(\omega)$

c) $F(\omega)=\dfrac{j\omega}{a^2+\omega^2}$ d) $F(\omega)=P_4(\omega-2)\,e^{j3\omega}$

23) Dados los siguientes pares transformados obtenga los pares transformados duales usando la propiedad de dualidad.

a) $e^{-at}u_s(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{(j\omega+a)}\quad a>0$ b) $P_a(t)\ \leftrightarrow\ a\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{a\omega}{2}\right)$ c) $e^{jat}\ \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-a)$

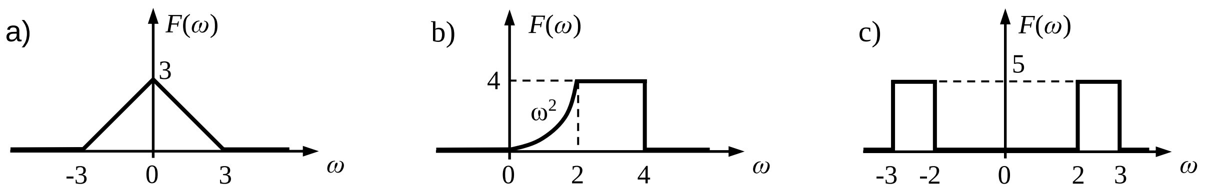
24) Encuentre $F(\omega)$ si $g(t)=e^{j\frac{\pi}{4}t}f(t)$ y los espectros de amplitud y fase de $g(t)$ son los siguientes:

$$|G(\omega)|=P_4(\omega)\qquad \theta(\omega)=-\frac{4}{\pi}\omega+1$$

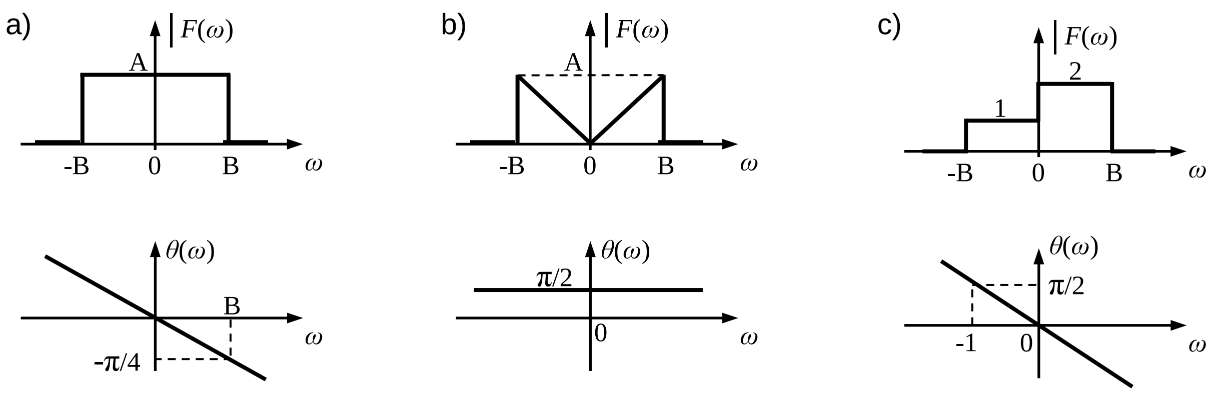
25) Halle el valor de la siguiente integral aplicando alguna propiedad adecuada de la tabla de Fourier.

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}4\,\mathrm{sinc}^2(x)\,dx$$

26) Mediante la propiedad de derivación en la frecuencia obtenga la $f(t)$ de las siguientes $F(\omega)$:



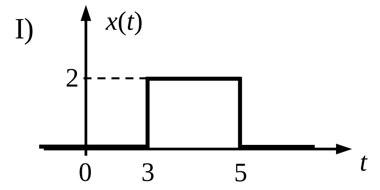
27) Obtenga la $f(t)$ correspondiente a los espectros de amplitud y fase dados.

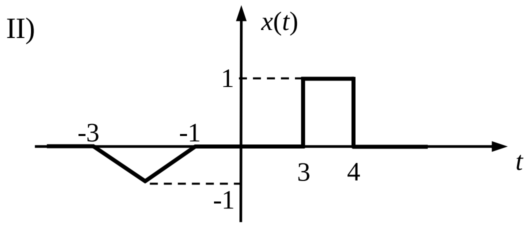


¿Qué conclusión obtiene sobre $|F(\omega)|$ y $\theta(\omega)$ en cuanto a si son funciones pares o impares y la $f(t)$ que generan?

Sugerencia: arme la $F(\omega)$ como $F(\omega)=|F(\omega)|\,e^{j\theta(\omega)}$

28) Para las señales mostradas en la figura:





a) Halle $X(0)$.

b) Encuentre la transformada de Fourier de $g(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)\, du$ usando propiedades.

c) Halle $g(t)$ integrando gráficamente.

c) Según el valor de $X(0)$ hallado en a), ¿qué tipo de señales se generaron al calcular $g(t)$? ¿Qué tipo de $G(\omega)$ encontró?

29) Dadas las siguientes señales:

Señales de Energía:	Señales de Potencia:	Señales de Orden Superior:
a) $x(t) = P_2(t-3)$	c) $x(t) = \mathrm{sen}^2(5t)\, u_s(t)$	e) $x(t) = 8t\, u_s(t)$
b) $x(t) = e^{-5\|t\|} \cos(10\,t)$	d) $x(t) = \mathrm{sign}\,(t)$	f) $x(t) = (t-1)^2$

Calcule la transformada de Fourier de cada señal [use tablas], grafique la señal $x(t)$ y su espectro de amplitud $|X(\omega)|$. ¿Qué tipo de señales generan siempre $X(\omega)$ continuas ?

30) Sea $f(t)$ la señal definida como:

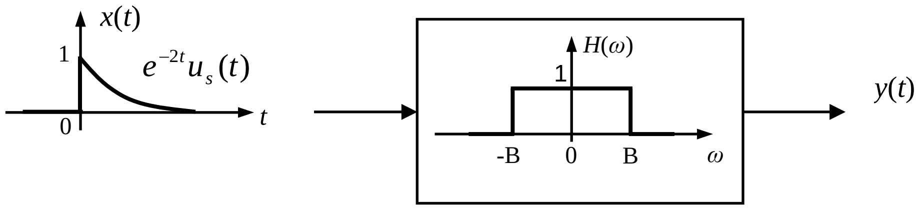
$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < -1 \\ 20\,t & si \quad -1 < t < 1 \\ 0 & si \quad t > 1 \end{cases}$$

a) Grafique $f(t)$ y obtenga $F(\omega)$ (puede usar la propiedad de derivación en el dominio temporal).

b) Si queremos expresar a $f(t)$ como $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$.
¿Qué valor tomará la integral para $t = -1$ y $t = 1$?
¿Cómo se deberá redefinir a $f(t)$ para que la integral converja a $f(t)$ en todos los puntos?

31) Un alumno calcula la transformada de Fourier de $u_s(t)$ usando la propiedad de derivación en el tiempo, sin embargo su resultado no coincide con el que muestra la tabla de transformadas. ¿Dónde está el error? Analice la relación entre la denominada propiedad de integración restringida y la propiedad de derivación en el tiempo.

32) Dado el siguiente sistema:



a) Obtener la densidad de energía $Sx(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{\pi}$ de la señal de entrada $x(t)$.

b) Con la densidad de energía obtenida en el inciso anterior, calcule la energía de $x(t)$.

c) Calcule la energía de $x(t)$ en el dominio del tiempo y verifique que da igual que en el inciso anterior.

d) Halle y grafique el espectro de amplitud de la salida, $Y(\omega)$.

e) Encuentre el valor de B del filtro pasabajos de modo que la energía de la señal $y(t)$ sea el 50% de la energía de la señal de entrada.

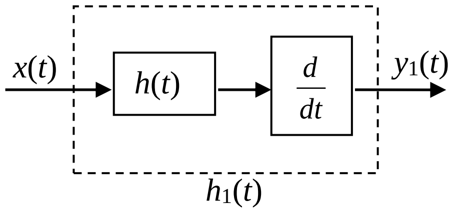
33) Un sistema lineal e invariante tiene una respuesta al impulso dada por $h(t) = e^{-t}u_s(t)$.

a) Halle la respuesta en frecuencia del sistema, $H(\omega)$ y grafique los espectros continuos de amplitud y de fase de $h(t)$.

b) Encuentre la transformada de Fourier de la salida, $Y(\omega)$, cuando la entrada es $x(t) = e^{-4t}u_s(t)$.

c) Halle y grafique $y(t)$.

d) El sistema anterior se conecta en serie con un bloque derivador como se muestra en la figura:

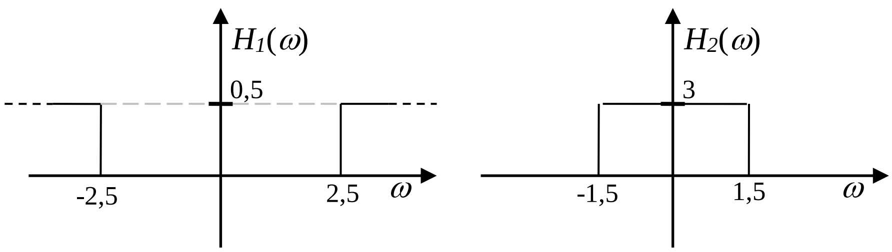


Halle $H_1(\omega)$ y grafique su amplitud y su fase. Encuentre la respuesta al impulso del nuevo sistema.

e) Halle $Y_1(\omega)$ cuando la entrada del nuevo sistema es la misma que en el inciso b).

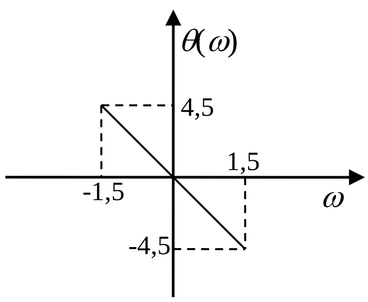
f) Halle y grafique $y_1(t)$.

34) Una señal $x(t) = 3 + 10\,\mathrm{sen}(t) + 4\cos(2t) + \mathrm{sen}(3t)$ ingresa a dos sistemas cuyas respuestas en frecuencia, que son reales, se muestran en los siguientes gráficos:



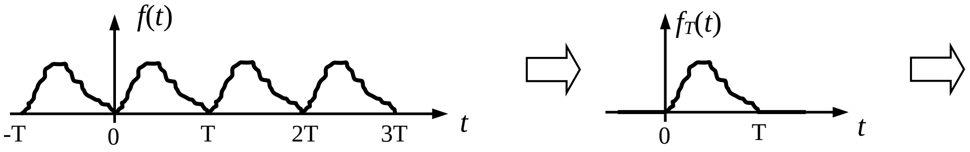
a) Halle la transformada de Fourier de la entrada y grafique su espectro de amplitud.
b) Halle las salidas de ambos sistemas en el dominio transformado y luego halle sus transformadas inversas. Grafíquelas en el dominio temporal.

c) Halle y grafique la salida de un nuevo sistema, cuya respuesta en frecuencia es $H(\omega) = |H_2(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$, donde el espectro de fase, $\theta(\omega)$ es:



35) Una forma de hallar los coeficientes de la serie exponencial Fourier (c_n), es tomar la función $f_T(t)$ la cual repetida cada T segundos forma la señal periódica $f(t)$, hacerle la transformada de Fourier y calcular los c_n como se indica abajo.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_T(t - nT)$$



$$C_n = \frac{F_T(n\omega_o)}{T}$$

Halle los coeficientes de Fourier de las señales del ejercicio 12, por este método.

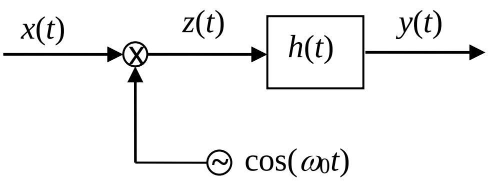
36) Demuestre que la siguiente identidad es verdadera para $f(t)$ y $g(t)$ funciones reales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G}(\omega)d\omega$$

37) Dada $f(t) = sen(\omega_0 t)\,P_a(t)$.

a) Grafíquela.
b) Obtenga $F(\omega)$ y grafique su espectro de amplitud para $\omega_0 >> 2\pi / a$.
c) ¿Qué sucede con el ancho del espectro cuando el ancho de la señal en el tiempo, a, aumenta?

38) Dado el sistema representado por el siguiente diagrama en bloques:



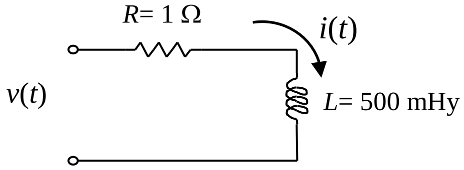
Con $x(t) = b\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{bt}{2}\right)$,

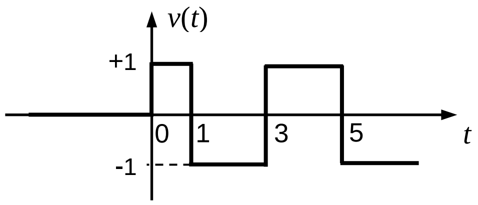
$h(t) = A\,a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{a(t-t_0)}{2}\right)$ con $a=4b$ y $\omega_0=4b$

a) Hallar $Z(\omega)$ y $H(\omega)$ y graficar sus correspondientes espectros de amplitud y fase.
b) Calcular la salida, $y(t)$.
c) Calcular la saluda, $y(t)$, si $a=10b$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Una tensión $v(t)$, periódica a partir de $t >= 0$ se aplica al circuito RL mostrado. Se pide lo siguiente:





a) Obtenga la serie trigonométrica de $v(t)$ (Use simetrías y extiéndala de modo que $v(t)$ quede expresada en función de cosenos).

b) Obtenga la $i(t)$ resolviendo la ecuación diferencial e identifique el régimen transitorio y permanente La corriente antes de aplicar la $v(t)$ es $i(0)=0$.

c) Calcule aproximadamente el valor eficaz de la $i(t)$ en régimen permanente utilizando sólo los tres primeros armónicos no nulos.

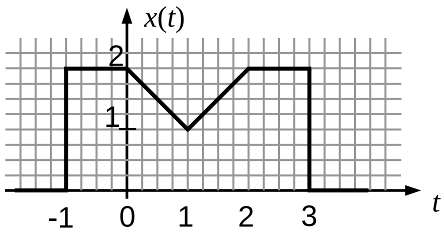
2) Grafique los espectros de amplitud y fase de las siguientes señales:

$x(t)=3+\text{sen}(t)$

$y(t)=1+0{,}8\cos(2t)+0{,}2\cos(4t)$

Diga, justificando su respuesta, si las señales temporales son pares o impares.

3) Sea $x(t)$, la señal mostrada en la figura. Sin calcular la $X(\omega)$ y basándose en las definiciones de la transformada, antitransformada y propiedades, resuelva los siguientes ítems:



a) Encuentre $X(0)$

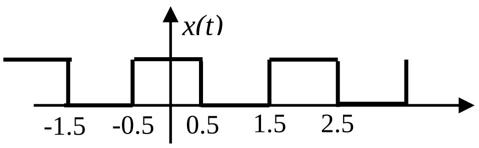
b) Encuentre $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, d\omega$

c) Resuelva la siguiente integral $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\ \text{sinc}(\omega)\, e^{j3\omega}\, d\omega$

d) Halle el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$

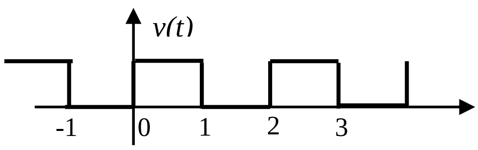
MATEMÁTICA AVANZADA
TRABAJO PRÁCTICO N° 4
Respuesta a los Ejercicios

4) a)



$$c_n^x = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \forall n$$

b)



$$c_n^v = -j\frac{(1-\cos(n\pi))}{2n\pi} \quad n \neq 0$$

$$c_0^v = \frac{1}{2}$$

d) $$v(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos(n\pi))}{n\pi}\text{sen}(n\pi\, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)\pi}\text{sen}((2k+1)\pi\, t)$$

5)

$x(t)$

a) $V_m=3 \quad T=1/5 \quad \omega_0=10\pi$

b) $a_n=40/(n^2+1) \quad b_n=9/n$

$c_n=20/(n^2+1) - j9/2n$

c) $x_3(t)=4\cos(30\pi t)+3\,\text{sen}(30\pi t)=5\cos(30\pi t - 0.6435)$

$y(t)$

a) $V_m = 2/3 \qquad T = 1 \qquad \omega_0 = 2\pi$

b) $a_n = 6/(n^2+9) \qquad b_n = 18/(n^3+9n)$

$c_n = 3/(n^2+j3n)$

c) $x_3(t) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{e^{j6\pi t}}{1+j} + \dfrac{e^{-j6\pi t}}{1-j}\right) = \left(\sqrt{2}/3\right)\cos(6\pi t - \pi/4)$

$z(t)$

a) $V_m = 1 \qquad T = 2 \qquad \omega_0 = \pi$

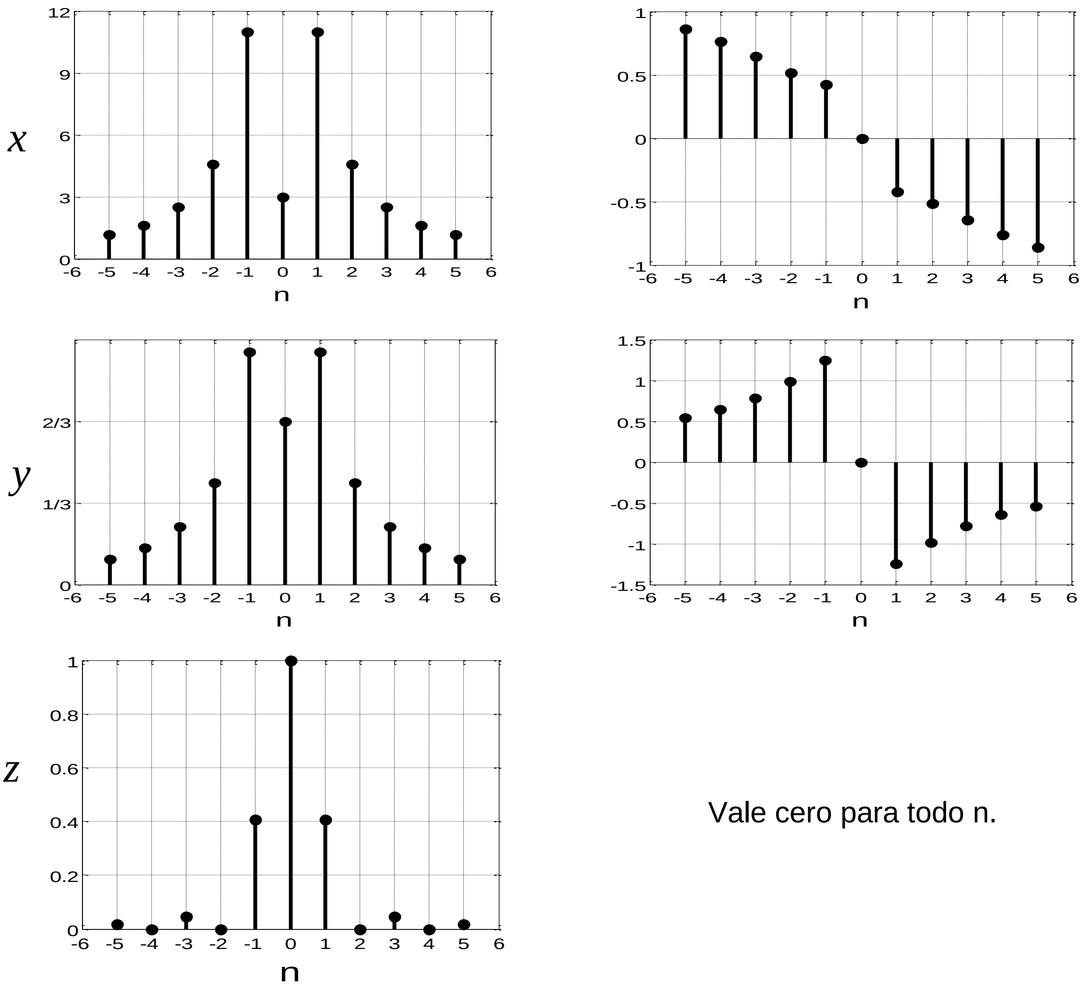
b) $a_n = 2\,\mathrm{sinc}^2(n\pi/2) \qquad b_n = 0$

$c_n = \mathrm{sinc}^2(n\pi/2)$

c) $z_3(t) = 0.0901\cos(3\pi t)$

d)

Amplitud de los c_n Fase de los c_n



Vale cero para todo n.

6) $g(t) = \dfrac{a_0}{2}t + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{b_n}{n\omega_0}\right)\cos(n\omega_0 t) + \left(\dfrac{a_n}{n\omega_0}\right)\mathrm{sen}(n\omega_0 t) + K(\text{constante})$

7) a) $f(0)=1$

$f(1)=5/2$

$f(2)=0$

$f(3)=-3/2$

b)
$$f(t)=\begin{cases} 1 & si \quad t=0 \\ 3 & si \quad 0<t<1 \\ 5/2 & si \quad t=1 \\ 2 & si \quad 1<t<2 \\ 0 & si \quad t=2 \\ -2 & si \quad 2<t<3 \\ -3/2 & si \quad t=3 \\ -1 & si \quad 3<t<4 \end{cases}$$

8) $y_4(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(4t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}(\cos(4t)-\mathrm{sen}(4t))=-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(4t-\frac{\pi}{4}\right)$

9) P_m (sin filtro) $=0{,}5$ mW $\qquad P_m$ (con filtro) $=0{,}475$ mW $\qquad 1\text{ mW}=10^{-3}$ W

10) a) Simetría Par $\quad \frac{a_0}{2}=\frac{2}{5}A \qquad b_n=0 \qquad a_n=\frac{4}{5}\int_0^2\left(-\frac{A}{2}t+A\right)\cos\left(n\frac{2}{5}\pi\, t\right)dt$

b) Simetría Par, de media onda → cuarto de onda par

$$\frac{a_0}{2}=0 \qquad b_n=0 \qquad a_n=2A\int_0^1\cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right)dt+3A\int_1^2\cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right)dt \qquad n \ \ impar$$

c) Simetría Impar, de media onda → cuarto de onda impar

$$\frac{a_0}{2}=0 \qquad a_n=0 \qquad b_n=2\int_0^1 (2A\,t+A)\ sen\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt \qquad n \ \ impar$$

d) Simetría de media onda

$$\frac{a_0}{2}=0 \qquad a_n=\frac{2}{3}\int_0^1 (-A\,t+A)\cos\left(n\frac{\pi}{3}t\right)dt-\frac{2}{3}\int_1^3 A\cos\left(n\frac{\pi}{3}t\right)dt \qquad n \ \ impar$$

$$b_n=\frac{2}{3}\int_0^1 (-A\,t+A)\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{3}t\right)dt-\frac{2}{3}\int_1^3 A\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{3}t\right)dt \qquad n \ \ \text{impar}$$

11) a) $f(t)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{n\pi}\,(1-\cos(n\pi))\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{t_0}t\right)\right]Pt_0\left(t-\frac{t_0}{2}\right)$

b) $f(t)=\left[\frac{2}{3}A+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\mathrm{A}\,\mathrm{sinc}\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\ \cos\left(n\frac{2\pi}{3t_0}t\right)\right]Pt_0\left(t-\frac{t_0}{2}\right)$

12) $A_3=5 \qquad \theta_3= -36{,}87°$

$A_3=\sqrt{2}/3 \qquad \theta_3= -45°$

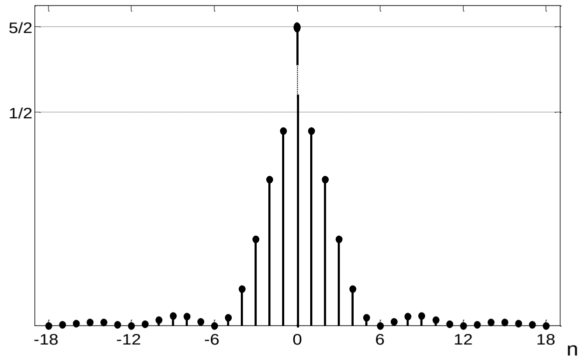
$A_3=0.0901 \qquad \theta_3= 0°$

13) a) $x(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}2\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\pi t)$ b) P_m=4/3 c) $P_{m\,serie}$= 1,3285 d) ε_m= 0.0048 e) $\%P$ = 0,3625%

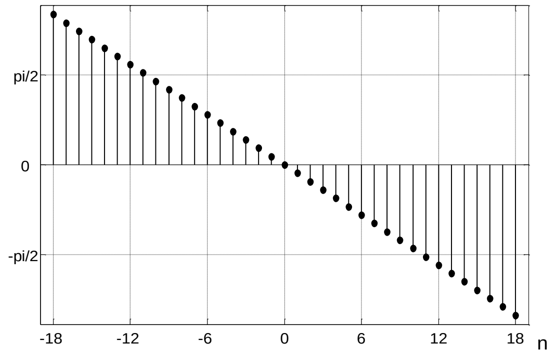
14) a) $x(t)=\frac{5}{2}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2(n\frac{\pi}{6})\,e^{-jn\frac{4\pi}{3}}\right]e^{jn\frac{\pi}{3}t}$, $n\neq 0$ ó $x(t)=\frac{5}{2}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2(n\frac{\pi}{6})\,e^{jn\frac{2\pi}{3}}\right]e^{jn\frac{\pi}{3}t}$, $n\neq 0$

b)

Espectro de amplitud



Espectro de fase



El gráfico del espectro de fase mostrado corresponde a la primera de las dos respuestas de la fase en b)

c) La separación entre barras es ω_0 cuando el eje de abscisas es nω_0.

15) a) $V_0(t)=12V\left[\frac{2\sqrt{2}}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\sqrt{2}\,\frac{1}{1-4n^2}\cos(n\,2\pi\,100t)\right]$

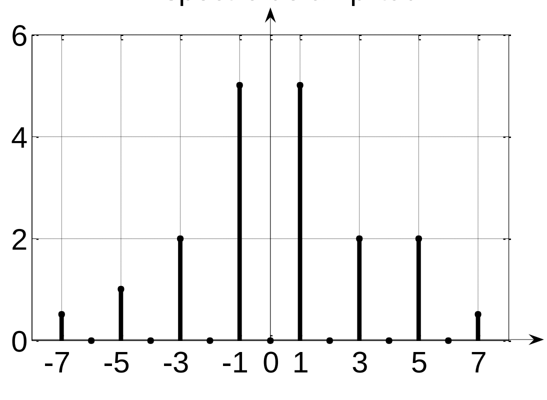
b) $fo=100\ Hz$

c) $fc<100\ Hz$, $Vcc=10.80\ V$

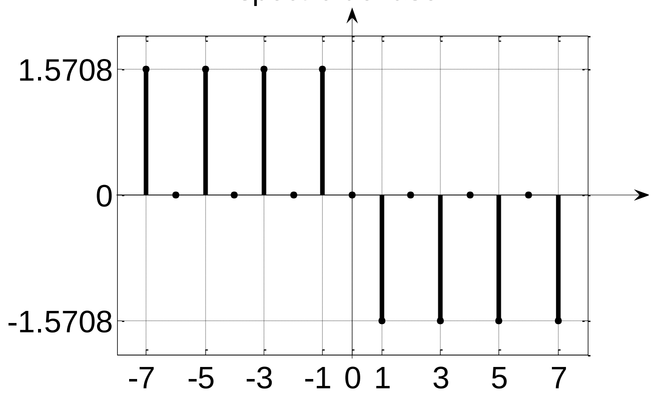
d) $y(t)=10{,}80-7{,}20\cos(2\pi 100t)-1{,}44\cos(2\pi 200t)-0{,}62\cos(2\pi 300t)$

16)

Espectro de amplitud



Espectro de fase

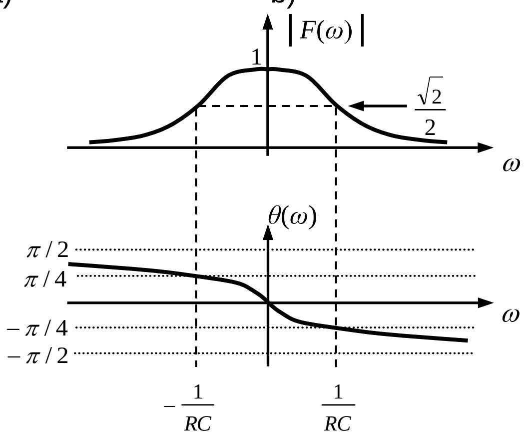


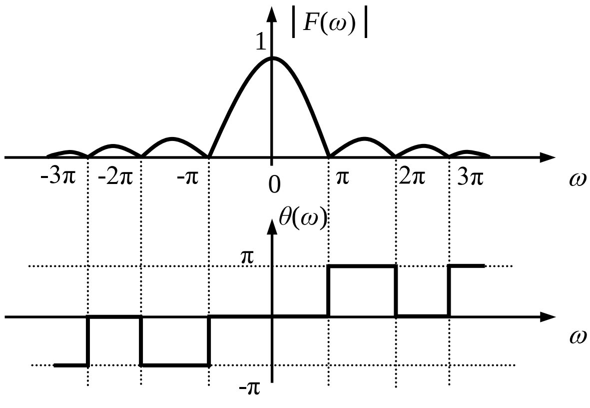
b) P_m = 15,125 W   c) Se necesitan las primeras dos armónicas.   d) THD = 45,83 %

20) a) $X_a(\omega)=b\operatorname{sinc}^2\left(\frac{b}{2}\omega\right)$

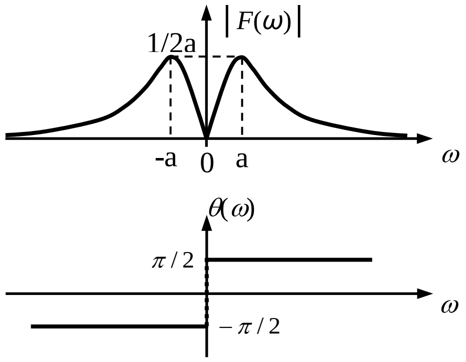
b) $X_b(\omega)=\frac{e^{-j\omega}-1}{\omega^2}-\frac{e^{-j2\omega}}{j\omega}$

22) a) b)

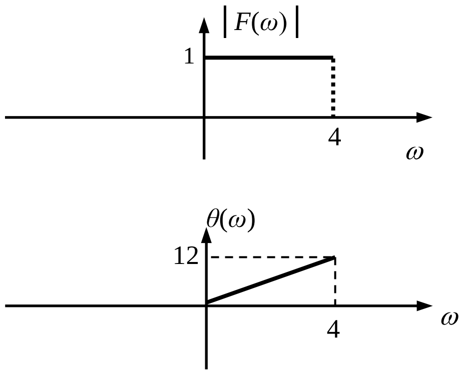




c)



d)



23) a) $\frac{1}{jt+a} \leftrightarrow 2\pi\, e^{a\omega}u(-\omega)$ b) $a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{at}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi\, P_a(\omega)$ c) $\delta(t-a) \leftrightarrow e^{-ja\omega}$

24) $F(\omega) = P_4\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) e^{-j\frac{4}{\pi}\omega}$ **23)** $I = 4\pi$

26) a) $f(t) = \frac{9}{2\pi}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3}{2}t\right)$

b) $f(t) = \frac{2}{\pi\, t^2}\left(e^{j2t} - j\,t\,e^{j4t} - e^{jt}\,\mathrm{sinc}(t)\right)$

c) $f(t) = \frac{5}{\pi}\left(3\,\mathrm{sinc}(3t) - 2\,\mathrm{sinc}(2t)\right)$

27) a) $f(t) = \frac{A\,B}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(B\left(t - \frac{\pi}{4B}\right)\right)$

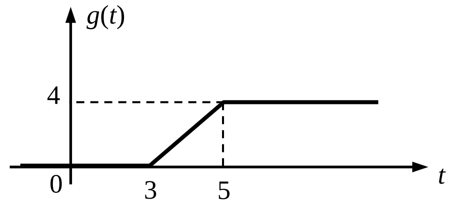
b) $f(t) = j\,\frac{A\,B}{\pi}\left(\mathrm{sinc}(B\,t) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(B\,\frac{t}{2}\right)\right)$

c) $f(t) = \frac{B}{2\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{B(t-\pi/2)}{2}\right)\left(e^{-j\frac{B}{2}(t-\pi/2)} + 2\,e^{j\frac{B}{2}(t-\pi/2)}\right)$

28) I) a) $X(0)=4$

b) $G(\omega)=\begin{cases}\dfrac{4}{j\omega}e^{-j4\omega}\operatorname{sinc}(\omega) & \omega\neq 0\\ 4\pi\delta(\omega) & \end{cases}$

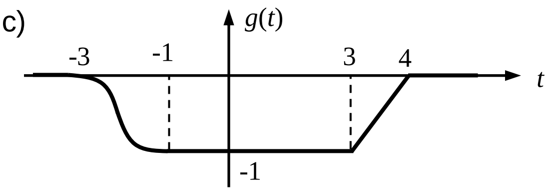
c)



II) a) $X(0)=0$

b) $G(\omega)=\begin{cases}-\dfrac{e^{j2\omega}}{j\omega}\operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{\omega}{2}\right)+\dfrac{e^{-j\frac{7}{2}\omega}}{j\omega}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{\omega}{2}\right) & \omega\neq 0\\ -\dfrac{11}{2} & \omega=0\end{cases}$

c)



29) a) $X(\omega)=2e^{-j3\omega}\operatorname{sinc}(\omega)$

b) $X(\omega)=\dfrac{1250+10\omega^2}{(125-\omega^2)^2+100\omega^2}=\dfrac{1250+10\omega^2}{(\omega^2-75)^2+100^2}$

c) $X(\omega)=\dfrac{50}{j\omega(100-\omega^2)}+\dfrac{\pi}{2}\left(\delta(\omega)-\dfrac{1}{2}\delta(\omega-10)-\dfrac{1}{2}\delta(\omega+10)\right)$

d) $X(\omega)=\dfrac{2}{j\omega}$

e) $X(\omega)=8\left(j\pi\delta'(\omega)-\dfrac{1}{\omega^2}\right)$

f) $X(\omega)=-2\pi\, e^{-j\omega}\delta''(\omega)$

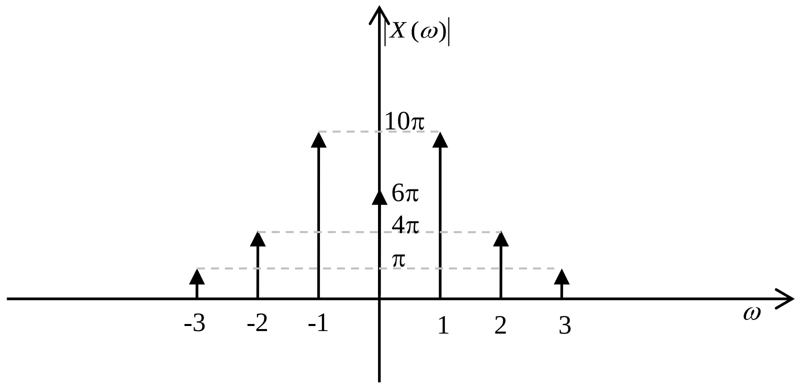
30) a) $F(\omega)=40\,\dfrac{\operatorname{sinc}(\omega)-\cos(\omega)}{j\omega}$ b) $f(1)=10$ $f(-1)=-10$, $f(t)=\begin{cases}0 & si\ \ t<1\\ -10 & si\ \ t=-1\\ 20t & si\ \ -1<t<1\\ 10 & si\ \ t=1\\ 0 & si\ \ t>1\end{cases}$

32) a) $S_X(\omega)=\dfrac{1}{\pi(4+\omega^2)}$ b) $E_X=\dfrac{1}{4}$ d) $B=2\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

33) a) $H(\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}$ b) $Y(\omega)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+j\omega}-\dfrac{1}{4+j\omega}\right)$ c) $y(t)=\dfrac{1}{3}\left(e^{-t}-e^{-4t}\right)u_s(t)$

d) $H_1(\omega)=\dfrac{j\omega}{1+j\omega};\quad h_1(t)=\delta(t)-e^{-t}u_s(t)$ e) $Y_1(\omega)=\dfrac{1}{4+j\omega}\left(1-\dfrac{1}{1+j\omega}\right)$ f) $y_1(t)=\dfrac{1}{3}\left(4e^{-4t}-e^{-t}\right)u_s(t)$

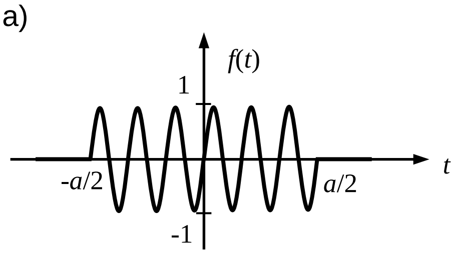
34) a) $X(\omega)=2\pi\left(3\delta(\omega)-j5\big(\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)\big)+2\big(\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)\big)-j\,\dfrac{1}{2}\big(\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)\big)\right)$



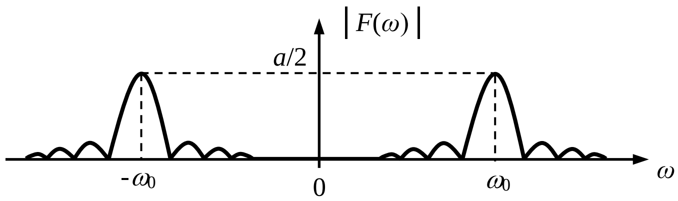
b) $y_1(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{sen}(3t)$; $y_2(t)=9+30\mathrm{sen}(t)$

c) $y_3(t)=9+30\mathrm{sen}(t-3)$

37) a)



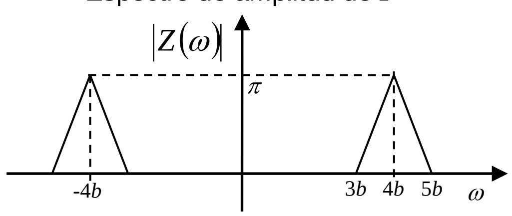
b)



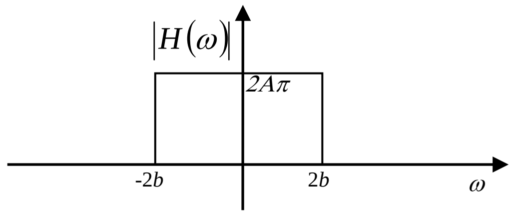
$$F(\omega)=\,j\,\frac{a}{2}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{a}{2}(\omega+\omega_0)\right)-\mathrm{sinc}\left(\frac{a}{2}(\omega-\omega_0)\right)\right)$$

38) $Z(\omega)=\pi\left[T_{2b}(\omega-4b)+T_{2b}(\omega+4b)\right]$ $H(\omega)=2A\pi\,P_{4b}(\omega)e^{-j\omega t_0}$

Espectro de amplitud de z



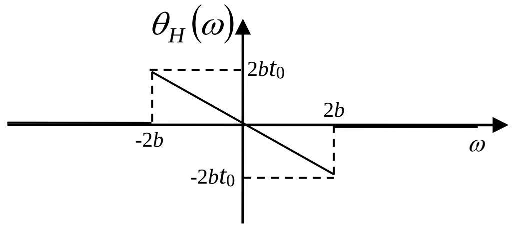
Espectro de amplitud de *h*



Espectro de fase de z

$$\theta_Z(\omega)=0 \qquad \forall\omega$$

Espectro de fase de *h*



b) $y(t)=0$

c) $y(t)=2A\pi\,b\,\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{b(t\text{-}t_0)}{2}\right)\cos\big(4b(t\text{-}t_0)\big)=2A\pi\,z(t\text{-}t_0)$

Ejercicios propuestos

1) a) $v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \operatorname{sinc}\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2} t \right) u(t)$

b)
$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-R}{R^2 + (n\omega_0 L)^2} a_n e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{a_n}{\sqrt{R^2 + (n\omega_0 L)^2}} \cos\left(n\omega_0\, t - arctg\left(\frac{n\omega_0 L}{R} \right) \right) \qquad para \quad t \geq 0$$

$$a_n = 2 \operatorname{sinc}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} \right)$$

c) $Ief \cong 0.719 \text{ A}$

3) a) 7
b) 4π
c) 2π
d) $\frac{76}{3}\pi$