MATEMÁTICA AVANZADA
TRABAJO PRÁCTICO Nº 5

Transformada de Laplace y Variable de Estado en el dominio de la frecuencia

1) Dadas las siguientes transformadas, provenientes de funciones $f(t)$ causales, determine y grafique en el plano "s" su región de convergencia analizando los polos y los ceros.

a) $F(s)=\dfrac{4}{s^2-4}$ b) $F(s)=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}$ c) $F(s)=\dfrac{(s-3)s}{(s+1)(s^2-9)}$

2) Dadas $x_1(t)=e^{-3t}u_s(t)$ y $x_2(t)=e^{-t}u_s(t)$, mostrar que x_1 y x_2 son funciones de orden exponencial y hallar la Transformada de Laplace de $x(t)=3x_1(t)-5x_2(t)$.
Determinar su región de convergencia.

3) Calcule el valor de las siguientes integrales a partir de la definición de la transformada de Laplace.

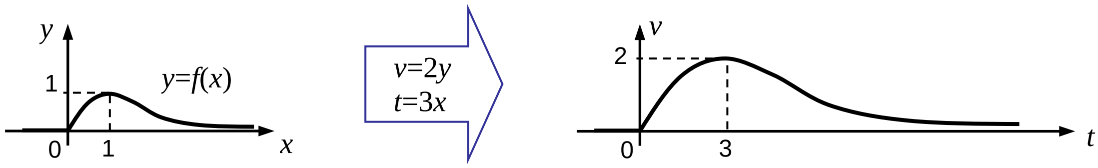
a) $I=\int_0^{\infty}\operatorname{sinc}(\omega_0 t)\,dt$ b) $I=\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-|3t|}\,dt$

4) Aplique la ***propiedad de escala*** para obtener las transformadas de Laplace de las siguientes señales:

a) $f(t)=(3t)^2+2(3t)+10$

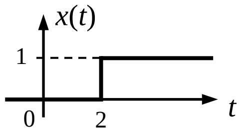
b) Se modifica la escala del dibujo de la función $y(x)$ de modo de ampliarlo en el eje x y en el eje y.

La transformada de $f(x)$ es $F(s)=\dfrac{k}{(s-1)^2}$. Halle $V(s)$.

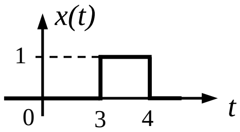


5) Aplique la ***propiedad de traslación en el tiempo*** para transformar las siguientes señales:

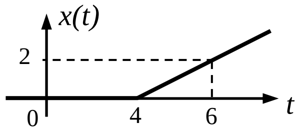
a)



b)



c)



6) Demuestre las siguientes proposiciones:

a) Si $\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{G(s)}{s}$ entonces $\mathcal{L}\{r^t f(at)\}=\dfrac{1}{s-\ln(r)}G\left(\dfrac{s-\ln(r)}{a}\right)$ $a>0$

Ayuda: $r^t=e^{\ln(r^t)}=e^{t\ln(r)}$

b) Si $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ entonces $\mathcal{L}\left\{\int_0^t dx\int_0^x f(u)du\right\}=\dfrac{F(s)}{s^2}$

Ayuda: use la propiedad de transformada de Laplace de la integral de una función.

7) Halle las transformadas de las siguientes funciones:

a) $x(t)=e^{-2t}\operatorname{sen}(t)u_s(t)$ b) $x(t)=t^2e^{4t}u_s(t)$

8) Haga la derivada primera de las señales del ejercicio 5) y, aplicando la propiedad correspondiente, encuentre la transformada de Laplace en cada caso.

9) Calcule las transformadas de las siguientes funciones, usando la propiedad: $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty} F(u)du$

a) $f(t)=\frac{\operatorname{sen}(at)}{t}u_s(t)$ b) $f(t)=\frac{1-e^{-2t}}{t}u_s(t)$ c) $f(t)=\frac{\operatorname{sh}(3t)}{t}u_s(t)$

10) Halle las transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

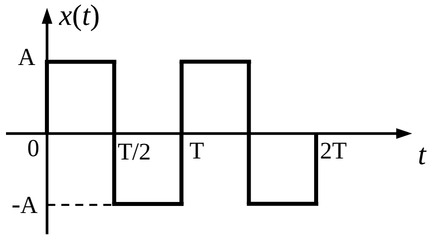
a) $f(t)=\int_0^t (u^3+5u^2+3u+2)du$ b) $f(t)=\int_0^t \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}du$

11) Usando la propiedad: $t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(s)$ calcule las transformadas de las siguientes señales:

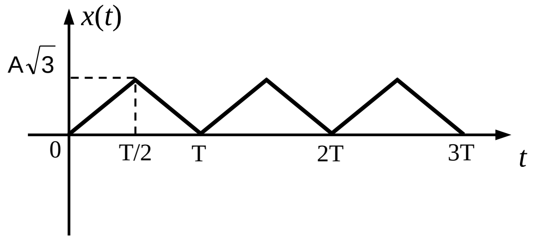
a) $f(t)=t\operatorname{sen}(6t)\,u_s(t)$ b) $f(t)=t^2\operatorname{ch}(3t)\,u_s(t)$

12) Halle las transformadas de Laplace de las siguientes señales periódicas.

a)



b)



<u>Transformada inversa de Laplace</u>

13) Use el método de desarrollar la *F(s)* en fracciones parciales para obtener *f(t)*.

a) $F(s)=\frac{e^{-4s}}{(s+2)(s+3)}$ b) $F(s)=\frac{s^2+4}{(s+1)(s^2+2s+5)}$ c) $F(s)=\frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$

14) Use la fórmula de inversión compleja para obtener *f*(*t*) de $F(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)}$.

$$\Big[\text{Fórmula de Inversión Compleja: } \quad f(t)=\sum_{k=1}^{n} \underset{S=Sk}{\operatorname{Res}}[F(s)e^{st}] \qquad n=\text{número de polos de } F(s)e^{st}\Big]$$

Analice el corrimiento introducido en 13) a) por el factor e^{-4s}.

15) Use la fórmula de inversión compleja para encontrar la *f(t)* correspondiente al caso presentado en 13) c).

16) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando transformada de Laplace a ambos miembros y distinga la solución libre de la solución forzada.

a) $y''(t)+4y(t)=10\,e^{-t}$ $y(0)=y'(0)=0$

b) $y''(t) - y(t) = 9t \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$

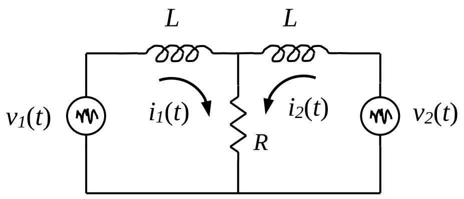
c) $y^{IV}(t) - y(t) = 0 \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1$

d) $y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 2 \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$

e) $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = \text{sen}(t) \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

- Grafique en todos los casos las soluciones libre, forzada y total.
- Compruebe que cumplen con las condiciones iniciales correspondientes en el dominio temporal y utilizando el teorema del valor inicial.

17) Dado el siguiente circuito, que se representa mediante el sistema de ecuaciones diferenciales mostrado, aplique la transformada de Laplace para encontrar la tensión en la resistencia R, $v_r(t)$, en función de las tensiones genéricas causales $v_1(t)$ y $v_2(t)$.



$$\begin{cases} v_1(t) = L\, i_1' + (i_1 + i_2)R \\ v_2(t) = L\, i_2' + (i_1 + i_2)R \end{cases} \qquad i_1(0) = 0 \quad i_2(0) = 0$$

18) Resuelva la ecuación diferencial del ejercicio 28) de la Guía 2 de Sistemas Lineales aplicando transformada de Laplace.

19) Dada la siguiente ecuación diferencial

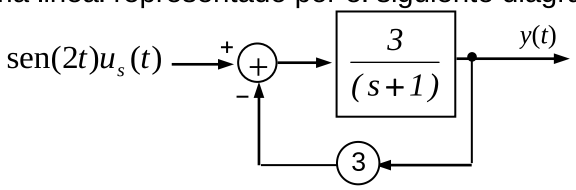
$$y''(t) + a\, y'(t) + b\, y(t) = x(t),$$

con:

I) $a = 3 \quad b = 2$ II) $a = 4 \quad b = 8$ III) $a = -2 \quad b = 10$

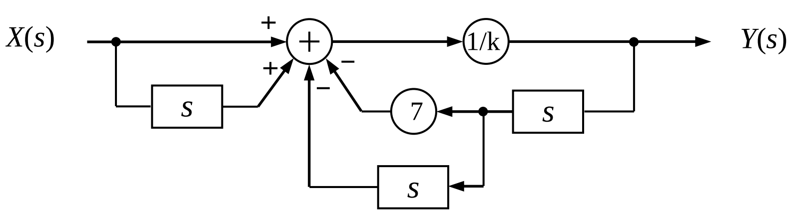
a) Halle la respuesta al impulso a partir de la $H(s)$ y ubique los polos en el plano s.
b) Grafique $h(t)$.
c) A partir del diagrama de polos y el gráfico de $h(t)$ analice si el sistema es estable o no.
d) En los casos I y II halle la salida cuando la entrada es $x(t)=2u_s(t)$ con condiciones iniciales nulas. Identifique la solución en régimen permanente.
e) Aplique el teorema del valor final a la transformada de Laplace de la salida hallada en d). Observe la relación con la solución en régimen permanente hallada antes.

20) Dado un sistema lineal representado por el siguiente diagrama en bloques:



Halle $y(t)$ utilizando la Transformada de Laplace de las funciones involucradas.

21) Dado el siguiente sistema:



a) Encuentre los valores de k para los cuales el sistema es estable.

Luego, suponiendo que k = 10:

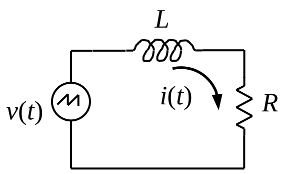
b) Halle la respuesta al impulso.

c) Obtenga la ecuación diferencial que modela al sistema.

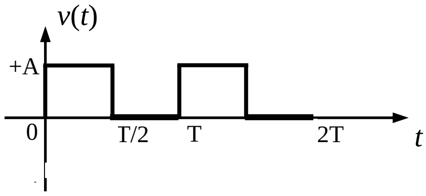
d) Calcule y(t) cuando $x(t) = 2e^{-4t}\,u_s(t)$ sabiendo que $y(0) = 2 \quad y'(0) = -4$. Distinga la solución libre de la solución forzada.

e) Muestre que la solución forzada tiene valor inicial nulo (se calcula con condiciones iniciales nulas).

22) Para el circuito de la figura, con una entrada $v(t)$ periódica como la mostrada, se pide:



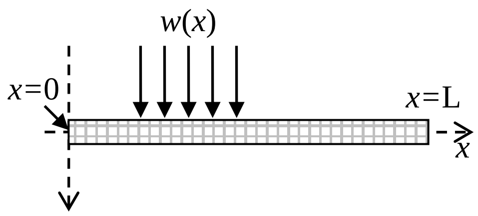
R = 1 Ω
L = 10 mHy
i(0)= 10 mA
A = 2 V
T = 10 ms



a) Obtenga la ecuación diferencial.

b) Aplicando la Transformada de Laplace encuentre $i(t)$. Identifique la parte de la corriente que depende de la entrada y la que depende de las condiciones iniciales.

23) Suponga una barra cuyos extremos están ubicados en $x=0$ y x=L coincidiendo con el eje x.



Si se aplica una carga vertical $w(x)$ por unidad de longitud que actúa transversalmente sobre la barra, entonces el eje de la barra sufre una deflexión $y(x)$ en el punto x que satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{w(x)}{E\,I} \qquad 0 < x < L$$

Esta deflexión transversal suele llamarse curva de deflexión o curva elástica. La cantidad EI se llama rigidez flexural de la barra y la supondremos constante (E es el módulo elástico de Young de la barra e I es el momento de inercia de una sección transversal de la barra alrededor del eje). Las cantidades $EIY''(x)$ y $EIY'''(x)$ se llaman, respectivamente, momento de flexión y momento de corte en x. Observe que la eje y se toma positivo hacia abajo, es decir, que las deflexiones son positivas hacia abajo.

Las condiciones de contorno asociadas con la ecuación diferencial dependen de la manera en que la barra es soportada. Las más comunes son las siguientes:

- Empotrada o fija: $y=y'= 0$
- Simplemente apoyada: $y=y''= 0$
- Libre: $y''=y'''=0$

a) Utilizando transformada de Laplace calcule la deflexión de una viga con sus extremos empotrados para $w(x)=\delta(x\text{-}L/2)$, $EI=1$, $L=1$.

El estado de la viga en los extremos está dado por las condiciones:

$$y(0)=y'(0)= y(L)=y'(L)=0.$$

b) Grafique la curva obtenida.

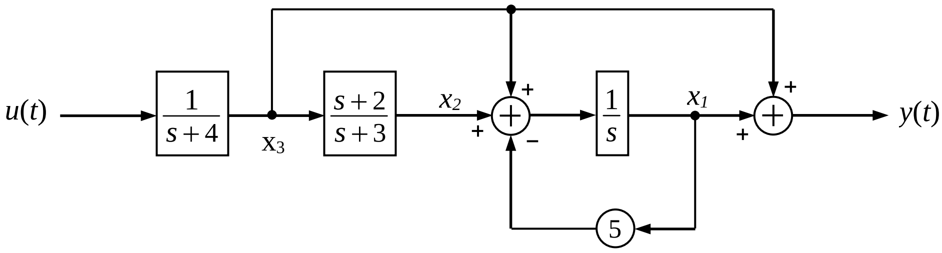
Ejercicio propuesto:

a) Demuestre que si f(t) es una señal que tiene transformada de Laplace $F(s)$, entonces $\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = \dfrac{d^{(n)}F(s)}{ds^n}$.

b) Aplique la propiedad anterior para encontrar $\mathcal{L}\{t\cos(t)u_s(t)\}$

Variable de estado en el dominio de la frecuencia

24) Dado el sistema de la figura:



a) Encuentre las matrices A, B, C y D del modelo de estado en el campo s.
b) Halle la matriz de transición en el dominio transformado, $\phi(s)$.
c) Utilizando la $\phi(s)$ obtenida calcule la función transferencia $H(s)$.
d) Obtenga la ecuación diferencial que modela al sistema.
e) ¿El sistema es estable? Justifique.
f) Represente al sistema con las ecuaciones matriciales y el diagrama en bloques correspondientes a la segunda forma canónica.
g) Calcule de nuevo el $H(s)$ con las ecuaciones de estado de la segunda forma canónica. Antes de realizar el cálculo: ¿a qué expresión se debería llegar para la $H(s)$?

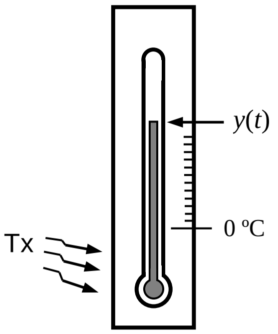
25) Considere el sistema descrito por las siguientes ecuaciones de estado:

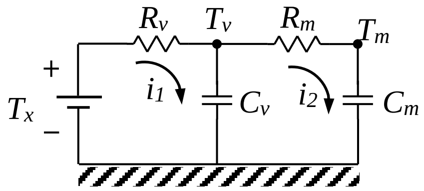
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre la transformada de Laplace de la matriz de transición, $\phi(s)$.
b) Halle la matriz de transición, $\phi(t)=e^{At}$.
c) Encuentre la función de transferencia.
d) A partir del modelo en variables de estado halle un diagrama en bloques utilizando bloques del tipo $1/s$.
e) Si las condiciones iniciales del sistema son $y(0^-) = 1$ e $y'(0^-) = 1$ y no hay entrada aplicada, obtenga las correspondientes condiciones iniciales para las variables de estado, $x_1(0^-)$ y $x_2(0^-)$.
f) Con las condiciones iniciales halladas en d) calcule la respuesta no forzada (libre) de los estados, $x(t)$. Grafique las respuestas y verifique las condiciones iniciales.
g) Halle la respuesta no forzada (libre) del sistema, $y(t)$. Grafique la respuesta y verifique la condición inicial.
h) Halle la respuesta total si la entrada es $u(t) = 10\,\mathrm{sen}(t)\,u_s(t)$ con las condiciones iniciales del inciso c). Utilice la respuesta calculada antes.
i) Calcule los autovalores y los autovectores de la matriz de estados. A partir de lo calculado analice la estabilidad del sistema justificando su análisis.

j) Proponga una matriz de transformación P tal que la matriz de estados del nuevo sistema sea diagonal.
k) Halle la matriz de estados y la matriz de transición de los estados del nuevo modelo. ¿Cómo será su función de transferencia?

26) La siguiente analogía eléctrica modela el comportamiento de un termómetro de mercurio.





T_x: Temperatura a medir. T_a: Temperatura ambiente. T_v: Temperatura en el interior del vidrio del termómetro. T_m: Temperatura del mercurio.	
C_v: Capacidad térmica del vidrio. C_m: Capacidad térmica del mercurio.	
R_v: Resistencia térmica del vidrio. R_m: Resistencia térmica del mercurio.	

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_pC_v} & \dfrac{1}{R_mC_v} \\ \dfrac{1}{R_mC_m} & -\dfrac{1}{R_mC_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_vC_v} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad R_p = \frac{R_mR_v}{R_m + R_v}$$

$$x_1 = T_v \qquad x_2 = T_m \qquad u(t) = T_x\, u_s(t)$$

$$R_v = 5\,\frac{°C}{Watts} \qquad C_v = 1\,\frac{Joules}{°C} \qquad R_m = 1\,\frac{°C}{Watts} \qquad C_m = 10\,\frac{Joules}{°C} \qquad k = 1\,\frac{mm}{°C}$$

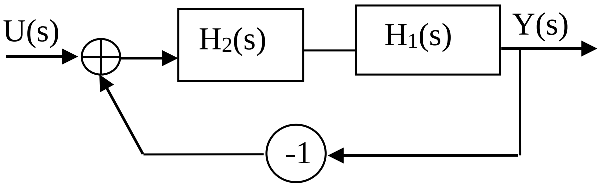
Las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ representan flujos de calor, y las temperaturas están representadas por tensiones. La constante k relaciona el desplazamiento del mercurio por el tubo (en mm) con la temperatura de dicha sustancia.

<u>El funcionamiento básico del sistema es el siguiente:</u> La fuente de calor, a temperatura T_x, hace que el calor pase a través de la resistencia térmica del vidrio R_v. Parte de ese calor queda almacenado en la masa del vidrio, representada por la capacidad térmica C_v, y otra parte pasa a través de R_m y calienta la masa de mercurio, la cual aumenta su volumen en una pequeña cantidad. Pero gracias a que el tubo de vidrio es de diámetro muy pequeño (capilar) se consiguen desplazamientos comparativamente grandes en el tubo, proporcionales al aumento de temperatura del mercurio.

Se pide:
a) Obtenga la transformada de Laplace de la matriz de transición de los estados, $\phi(s)$.
b) Usando la $\phi(s)$ obtenida calcule la función transferencia $H(s)$.
c) Si el termómetro se encuentra en equilibrio térmico a temperatura ambiente (T_x = 20 ºC) (los capacitores C_v y C_m están "cargados" a T = 20 ºC) y en t=0 se utiliza para controlar a una persona que tiene una temperatura de 40 ºC. ¿Cuánto tiempo tardará el termómetro en marcar el 99% de los 40ºC? Grafique y(t) [ºC] utilizando Matlab y vea el resultado en el gráfico.
d) Suponga que el termómetro ha estado sometido a 40ºC el tiempo suficiente como para que la indicación $y(t)$ este estable (régimen permanente), y en un t=0 se pone el termómetro nuevamente a

temperatura ambiente. Calcule el tiempo que le lleva al termómetro marcar 21 ºC. Haga el gráfico de $y(t)$ [ºC] utilizando Matlab y vea el resultado en el gráfico.
e) Encuentre la matriz de transformación Q tal que el modelo de estado represente a las variables de estado $(v_1,v_2) = (i_2,T_v)$.
f) Halle las ecuaciones de estado para las variables $(V_1(s), V_2(s))$ del inciso anterior.
g) ¿Cómo serán $H(s)$ y $\phi(s)$ en el modelo transformado con respecto a las del modelo original? No calcule, sólo responda.

27) Un sistema inestable, con función de transferencia $H_1(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ es parte de un nuevo sistema, que incluye un filtro $H_2(s) = \dfrac{ks+10}{(s+6)}$ y una realimentación como muestra la figura :



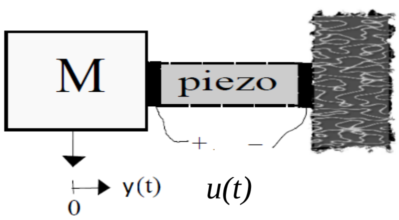
a) Encuentre la Función de Transferencia del sistema completo.
b) Verifique que el modelo en Variables de Estado conocido como de la segunda forma canónica es el siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -(k+6) & -7 \end{bmatrix};\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & k & 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{D} = 0$$

c) Se considera que el sistema completo tendría el funcionamiento deseado si sus autovalores fuesen λ_1= -5, $\lambda_{2,3}$= -1±j. Encuentre el valor de k en el filtro para que esto ocurra.
d) Verifique que $[1 \ \ -5 \ \ 25]^T$ es un autovector que corresponde a λ_1= -5.
e) Complete con lo encontrado en d) la matriz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \ldots & j & -j \\ \ldots & -1-j & -1+j \\ \ldots & 2 & 2 \end{bmatrix}$, donde, en las 2 últimas columnas aparecen los autovectores correspondientes a $\lambda_{2,3}$.
f) Si se transformara el sistema de la segunda forma canónica utilizando la matriz $\mathbf{P}$ del inciso e), se generarían nuevas variables de estado $\mathbf{v}$, tales que $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{v}$. Sin calcular $\mathbf{P}^{-1}$, encuentre $\mathbf{A}_v$ y la matriz transición de los estados $\phi_{\mathbf{v}}(s)$ para los nuevos estados **v.**
g) Encuentre la expresión, en el dominio transformado de la solución natural de los estados $\mathbf{V}(s)$**,** si $v_1(0)= v_2(0)=1$, $v_3(0)=0$. Encuentre también $\mathbf{v}(t)$**.**
h) Luego a partir de $\mathbf{v}(t)$, calcule $\mathbf{x}(t)$, y $y(t)$.

28) El esquema de la figura representa un dispositivo conformado por una masa M unida a un bloque de material piezoeléctrico (que se contrae levemente al aplicarle una tensión eléctrica) con electrodos metálicos sobre las caras opuestas, donde la posición y(t) de dicha masa depende del voltaje u(t). La ecuación diferencial que describe el sistema con sus parámetros es:

$$\alpha\, u(t) - r\frac{dy(t)}{dt} - \frac{1}{C}\, y(t) = M\,\frac{d^2y(t)}{dt^2},$$



Donde α es la constante de proporcionalidad de la fuerza que ejerce el piezoeléctrico a la masa M; r es la constante de resistencia mecánica; C es la capacidad mecánica del bloque piezoeléctrico.

Sabiendo que α=10 N/V ; r = 10 kg/s; C=1,9802x10 $^{-3}$ s^2/kg; M=5 kg, se pide:

a) Encuentre la función de transferencia del SLIT que representa al dispositivo, $H(s)$.
b) Encuentre, trabajando en el dominio transformado, la respuesta del sistema, $Y(s)$, si $u(t)=10\,e^{-2t}\,u_s(t)$, $y(0)= 1$, $y'(0)=0$. Distinga entre respuesta libre y forzada.
c) Encuentre la respuesta temporal del sistema, $y(t)$.
d) Encuentre una representación del sistema en VE en el dominio de la variable de Laplace, 's'.
e) Analice la estabilidad del sistema a partir de la matriz de estados, $\mathbf{A}$.
f) Halle la matriz de transición de los estados, $\phi(s)$, y a partir de ella calcule la función de transferencia del sistema.
g) Proponga una matriz $\mathbf{P}$ para obtener un nuevo modelo en VE tal que la matriz de estados resulte diagonal. Escriba la matriz de estados resultante.

MATEMÁTICA AVANZADA
TRABAJO PRÁCTICO Nº 5
Respuesta a los Ejercicios

1) a) $RC: \quad \sigma > 2$ b) $RC: \quad \sigma > 0$ c) $RC: \quad \sigma > -1$

2) $X(s) = \dfrac{-2(s+6)}{(s+3)(s+1)}$ $RC: \quad \sigma > -1$

3) a) $I = \dfrac{\pi}{2\omega_o}$ b) $I = \dfrac{4}{27}$

4) a) $F(s) = \dfrac{10s^2 + 6s + 18}{s^3}$ b) $V(s) = 6\dfrac{k}{(3s-1)^2}$

5) a) $X(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s}$ b) $X(s) = \dfrac{e^{-3s} - e^{-4s}}{s}$ c) $X(s) = \dfrac{e^{-4s}}{s^2}$

7) a) $X(s) = \dfrac{1}{\left((s+2)^2+1\right)}$ b) $X(s) = \dfrac{2}{(s-4)^3}$

9) a) $F(s) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{s}{a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{a}{s}\right)$ b) $F(s) = \operatorname{Log}\left(\dfrac{s+2}{s}\right)$ c) $F(s) = \dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\dfrac{s+3}{s-3}\right)$

10) a) $F(s) = \dfrac{2s^3 + 3s^2 + 10s + 6}{s^5}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{s}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{s}\right)$

11) a) $F(s) = \dfrac{12s}{(s^2+36)^2}$ b) $F(s) = \dfrac{2s(s^2+27)}{(s^2-9)^3}$

12) a) $F(s)=\dfrac{A}{s}\;\dfrac{\left(1-e^{-s\frac{T}{2}}\right)}{\left(1+e^{-s\frac{T}{2}}\right)}$ b) $F(s)=\dfrac{2A\sqrt{3}}{T\;s^{2}}\;\dfrac{\left(1-e^{-s\frac{T}{2}}\right)}{\left(1+e^{-s\frac{T}{2}}\right)}$

13) a) $f(t)=(\;e^{-2(t-4)}-e^{-3(t-4)}\;)\,u_s(t-4)$

b) $f(t)=\dfrac{1}{4}e^{-t}\;[\,5-\cos(2t)-4\operatorname{sen}(2t)\,]\;u_s(t)$

c) $f(t)=[\;(2t-1)e^{-t}+e^{-2t}\;]\;u_s(t)$

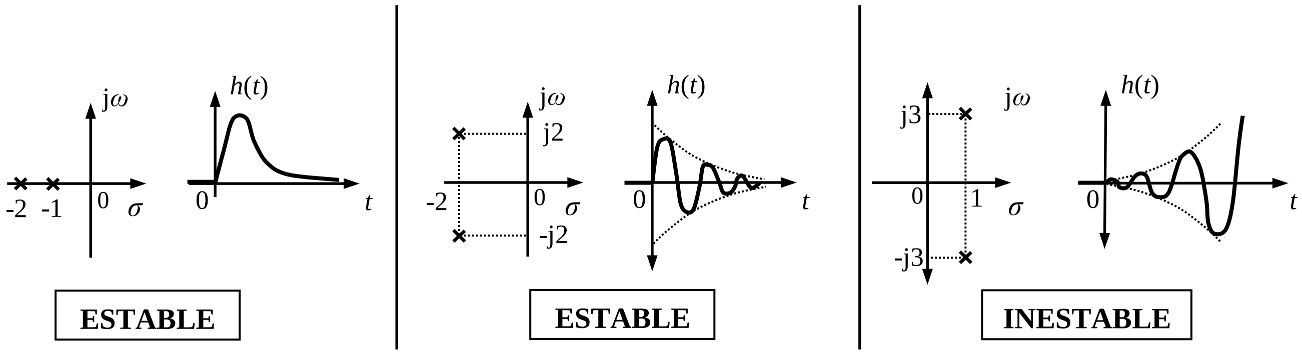
16) a) $y(t)=[\;2e^{-t}-2\cos(2t)+\operatorname{sen}(2t)\;]\;u_s(t)$ b) $y(t)=(\;-9\,t-4\,e^{-t}+4\,e^{t}\;)\,u_s(t)$

c) $y(t)=\dfrac{1}{2}[\operatorname{sh}(t)-\operatorname{sen}(t)]\,u_s(t)$ d) $y(t)=\dfrac{1}{13}\left(2-15e^{-2t}\cos(3t)-10e^{-2t}\sin(3t)\right)u_s(t)$

e) $y(t)=\dfrac{1}{50}\left(4\operatorname{sen}(t)-3\cos(t)+(3+55t)\,e^{-3t}\right)u_s(t)$

17) $v_R(t)=\dfrac{R}{L}\;e^{-2\frac{R}{L}t}\;\displaystyle\int_0^t[\;v_1(\lambda)+v_2(\lambda)\;]\;e^{2\frac{R}{L}\lambda}\;d\lambda$

19) I) $h(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u_s(t)$ II) $h(t)=\dfrac{1}{2}e^{-2t}\operatorname{sen}(2t)\,u_s(t)$ III) $h(t)=\dfrac{1}{3}e^{t}\operatorname{sen}(3t)\,u_s(t)$



d) I) $y(t)=\dfrac{1}{2}\left(1+e^{-2t}-2e^{-t}\right)u_s(t)$

II) $y(t)=\dfrac{1}{8}\left(1-e^{-2t}\cos(2t)-e^{-2t}\operatorname{sen}(2t)\right)u_s(t)$

20) $y(t)=\dfrac{3}{104}[\;2e^{-10\,t}+10\operatorname{sen}(2t)-2\cos(2t)\;]\;u_s(t)$

21) a) Para que el sistema sea estable debe ser: $k>0$

b) $h(t)=\frac{1}{3}\left(4e^{-5t}-e^{-2t}\right)u_s(t)$

c) $y''(t)+7y'(t)+10y(t)=x(t)+x'(t)$

d) $y(t)=\left(3e^{-4t}+e^{-2t}-2e^{-5t}\right)u_s(t)=\left(\underbrace{3e^{-4t}-2e^{-5t}-e^{-2t}}_{\text{Solución forzada}}+\underbrace{2e^{-2t}}_{\text{Solución libre}}\right)u_s(t)$

22) a) $L\,\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t)=v(t)$

$$i(t)=i_0\,e^{-R/L\,t}u_s(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{R}\left[\left(1-e^{-\frac{R}{L}(t-nT)}\right)u_s\left(t-nT\right)-\left(1-e^{-\frac{R}{L}(t-\frac{T}{2}-nT)}\right)u_s\left(t-\frac{T}{2}-nT\right)\right]$$

b)

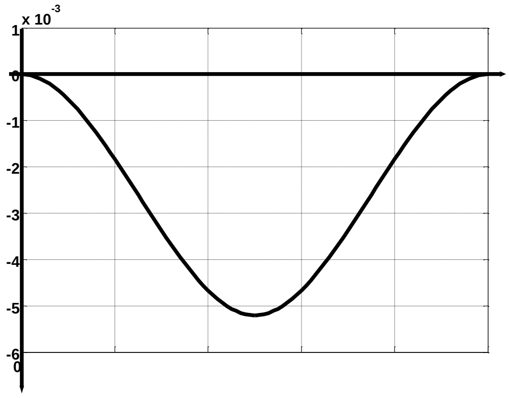
$$i(t)=i_0\,e^{-R/L\,t}u_s(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{R}\left[(-1)^n\,u_s\left(t-nT/2\right)-(-1)^n e^{-\frac{R}{L}(t-nT/2)}\,u_s\left(t-nT/2\right)\right]$$

23)

a)

$$Y(x)=\begin{cases}\frac{L}{16EI}x^2-\frac{1}{12EI}x^3 & 0\le x\le L/2\\ \frac{(x-L/2)^3}{6EI}+\frac{L}{16EI}x^2-\frac{1}{12EI}x^3 & L/2\le x\le L\end{cases}$$

b) Gráfico para EI=1, L=1.

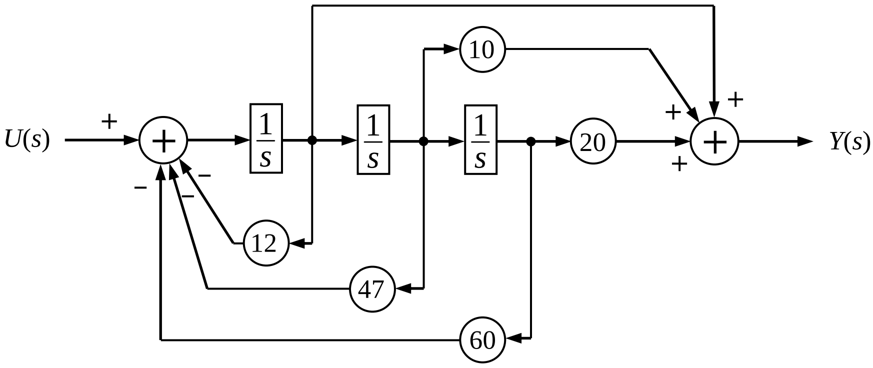


24) a) $A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad D=0$

b) $\phi(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{s+5} & \frac{1}{(s+5)(s+3)} & \frac{s+1}{(s+5)(s+3)(s+4)}\\ 0 & \frac{1}{s+3} & \frac{-2}{(s+3)(s+4)}\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+4}\end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $H(s)=\frac{s^2+10s+20}{(s+5)(s+3)(s+4)}$

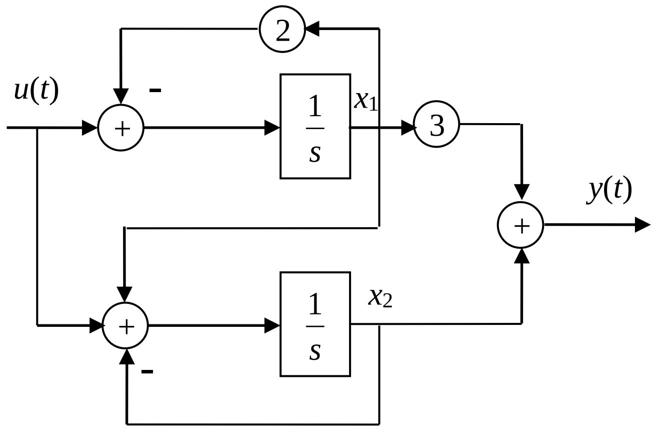
d) $y'''(t)+12y''(t)+47y'(t)+60y(t)=u''(t)+10u'(t)+20u(t)$ $\qquad$ e) Estable

f) $\begin{pmatrix}sV_1(s)\\ sV_2(s)\\ sV_3(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -60 & -47 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1(s)\\ V_2(s)\\ V_3(s)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}U(s)$ $\qquad Y(s)=\begin{pmatrix}20 & 10 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1(s)\\ V_2(s)\\ V_3(s)\end{pmatrix}$



25) a) $\phi(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+2} & 0\\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{s+1}\end{pmatrix}$ b) $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{-2t} & 0\\ e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}\end{pmatrix}u_s(t)$ c) $H(s)=\dfrac{4s+6}{s^2+3s+2}$

d)



e) $x_1(0)=-1; \quad x_2(0)=4$ f) $x_h(t)=\begin{pmatrix}-e^{-2t}\\ 3e^{-t}+e^{-2t}\end{pmatrix}u_s(t)$ g) $y_h(t)=(3e^{-t}-2e^{-2t})\,u_s(t)$

h) $y(t)=(\,13e^{-t}+2e^{-2t}-14\cos(t)+18\,\mathrm{sen}(t)\,)\,u_s(t)$

i) Autovalores: λ_1= -1, λ_2= -2. Autovectores: $\mathbf{v_1}=k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2}=k\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}$.

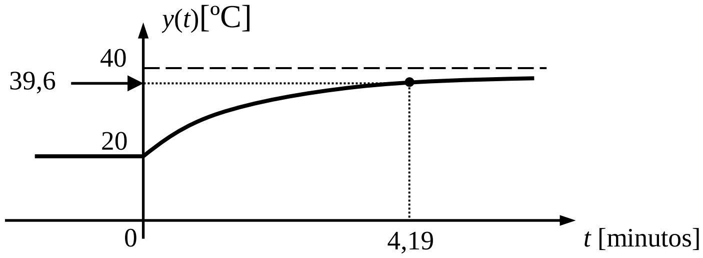
j) $\mathrm{P}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, esta es una de las infinitas matrices que permiten hacer esta transformación.

k) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, $\phi(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}u_s(t)$

26) a) $\phi(s)=\dfrac{1}{(s^2+\frac{13}{10}s+\frac{1}{50})}\begin{pmatrix}s+\dfrac{1}{10} & 1\\ \dfrac{1}{10} & s+\dfrac{6}{5}\end{pmatrix}$ b) $H(s)=\dfrac{1}{50s^2+65s+1}$

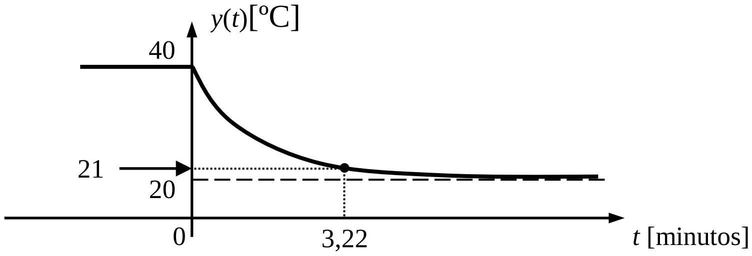
c) t = 252 segundos

$$y(t) = (40 + 0{,}2454e^{-1{,}2844t} - 20{,}2454e^{-0{,}0156t}) * u_s(t)$$



d) t = 193 segundos

$$y(t) = (20 - 0{,}2454e^{-1{,}2844t} + 20{,}2454e^{-0{,}0156t}) * u_s(t)$$



e) $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} sV1(s) \\ sV2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V1(s) \\ V2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} U(s)$ $\quad Y(s) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V1(s) \\ V2(s) \end{pmatrix}$

27) a) $H(s) = \dfrac{ks + 10}{s^3 + 7s^2 + (k+6)s + 10}$

c) k=6.

e) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & j & -j \\ -5 & -1-j & -1+j \\ 25 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

f) $\mathbf{A_v} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1+j & 0 \\ 0 & 0 & -1-j \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{v}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1-j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1+j} \end{bmatrix}$

g) $\mathbf{v}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} \\ \frac{1}{s+1-j} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ e^{-(t-j)} \\ 0 \end{bmatrix} u_s(t)$

h) $y(t) = \left[-20e^{-5t} + (4j - 6)e^{-(t-j)}\right] u_s(t)$

28) a) $H(s) = \dfrac{2}{s^2 + 2s + 101} = \dfrac{2}{(s+1)^2 + 100}$

b) $Y_f(s)=\dfrac{20/101}{s+2}-\dfrac{20/101(s+1)}{(s+1)^2+10^2}+\dfrac{20/101}{(s+1)^2+10^2}$; $Y_l(s)=\dfrac{(s+1)}{(s+1)^2+10^2}+\dfrac{1}{(s+1)^2+10^2}$

c) $y(t)=\left(\dfrac{20}{101}e^{-2t}+\dfrac{81}{101}e^{-t}\cos(10t)+\dfrac{121}{1010}e^{-t}\operatorname{sen}(10t)\right)u_s(t)$

d) $sX(s)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -101 & -2\end{pmatrix}X(s)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}U(s)$

$Y(s)=\begin{pmatrix}2 & 0\end{pmatrix}X(s)$

e) Sistema estable

f) $\Phi(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s^2+2s+101} & \dfrac{1}{s^2+2s+101}\\ \dfrac{-101}{s^2+2s+101} & \dfrac{s}{s^2+2s+101}\end{bmatrix}$

g) $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\\ k_1(-1+10j) & k_2(-1-10j)\end{bmatrix}$

Una de las infinitas posibles matrices de transformación, donde k_1 y k_2 pueden ser cualquier número.