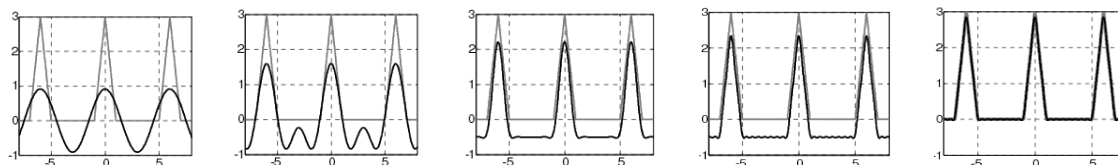


Departamento de Matemática
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Mar del Plata



MATEMÁTICA AVANZADA

<http://www3.fi.mdp.edu.ar/mateavanzada>

Trabajos Prácticos
2018

MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

Funciones analíticas

Demostrar que e^z es analítica en todo el plano complejo Z .

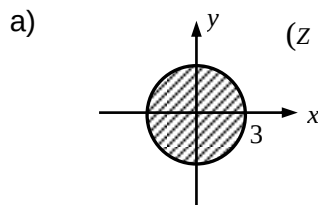
Singularidades de una función

1) Estudiar las singularidades de las siguientes funciones calculando límite:

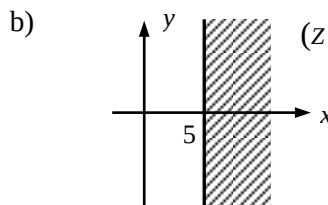
$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(z) = \frac{1}{z - z^3} & \text{b) } f(z) = \frac{z^5}{(1 - z)^2} & \text{c) } f(z) = \frac{z - 3}{(z^2 - 9)z^2} \\ \text{d) } f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^7} & \text{e) } f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z} & \text{f) } f(z) = e^{1/z} \end{array}$$

Transformación Lineal: $w = Az + B$

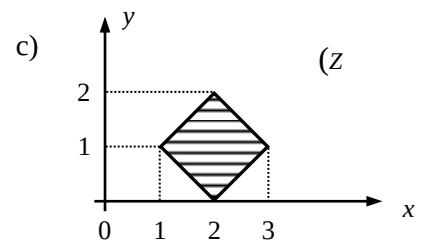
2) Recordando el significado geométrico de los coeficientes A y B obtenga, sin hallar las coordenadas de transformación, la imagen de los siguientes recintos con las transformaciones dadas en cada caso:



$$w = 2z + 6$$



$$w = \frac{1}{5} j z$$



$$w = (1 + j)z - 2j$$

3) Obtenga las imágenes de los recintos anteriores en forma analítica.

Transformación Inversa:

$w = \frac{1}{z}$

4) a) Demuestre que las rectas que pasan por el origen en el plano Z se transforman en rectas del mismo tipo en el plano W . ¿Qué relación hay entre las pendientes de ambas rectas?

b) Demuestre que las circunferencias de radio r centradas en el origen en el plano Z se transforman en circunferencias centradas en el origen en el plano W . ¿Qué relación hay entre los radios de ambas circunferencias?

5) Dada la siguiente región en el plano z , $(x - 1)^2 + y^2 - 1 > 0$, se pide:

a) Grafique la región en Z .

b) Halle y grafique la región transformada mediante la transformación $w = \frac{3}{z}$.

Transformación Bilineal:

$$w = \frac{A z + B}{C z + D}$$

6) ¿En qué se transforman los siguientes recintos mediante las transformaciones que se dan a continuación de cada uno?

a) $0 < x < 1$, $w = \frac{z-1}{z}$

b) $0 \leq x \leq 3, y \leq 2$, $w = \frac{2z-j}{jz+2}$

Observe que desde el punto de vista del trabajo algebraico es más conveniente tener la transformación escrita como z en función de w .

7) Hallar la transformación bilineal que transforma los puntos

$$z_1 = -j, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = j \quad \text{en} \quad w_1 = -1, \quad w_2 = j, \quad w_3 = 1.$$

Integrales en el Campo Complejo:

8) Calcule la siguiente integral $I = \int_C e^z dz$, donde C es un camino que va desde $z_{\text{inicial}} = 0$ a $z_{\text{final}} = 2+2j$, en cada uno de los siguientes casos:

- a) Siendo el camino C , la recta $y = x$.
- b) Siendo el camino C , la parábola $y = x^2/2$.
- c) Calcule la integral en Z entre z_{inicial} y z_{final} .

¿Qué puede decir acerca de los resultados hallados en los tres incisos?

9) Dada $I = \int_C \frac{\text{sen}(z)}{z+6} dz$, siendo C la elipse $z(t) = 5\cos(t) + j3\text{sen}(t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Analice:

- a) ¿Es C un camino abierto o cerrado?
- b) En caso de que el camino sea abierto, ¿la función integrando es analítica en una región que rodea dicho camino? Si el camino es cerrado, ¿la función integrando es analítica en la región encerrada por el camino?
- c) Resuelva la integral.

Calcular las siguientes integrales utilizando la Fórmula de la Integral de Cauchy o la Fórmula de la Derivada de la Integral de Cauchy según corresponda:

10) a) $\int_C \frac{e^{3z}}{(z-j\pi)} dz$ siendo C los caminos: a₁) $|z-1| = 4$ a₂) $|z| = 1$

b) $\int_C \frac{z+2}{(z+3)(z-1)} dz$ siendo C los caminos: b₁) $|z| = 2$ b₂) $|z| = 4$ b₃) $|z-2| = 1/2$

c) $\int_C \frac{e^{zt}}{(z^2+1)(z-j)} dz$ donde C es la curva $z(\theta) = 1+3e^{j\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $t > 0$

d) $\int_C \frac{\text{sen}(z)}{(z-1)^2(z^2+9)} dz$ con $C: |z| = 3/2$

e) $\int_C \frac{e^{jz}}{z^3} dz$ con $C: z(t) = 2e^{jt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

f) Resolver todos los incisos aplicando el teorema de los residuos.

Series de Potencias:

11) Dada la siguiente función, $f(z)$, se pide lo siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

- Grafique todas las zonas del plano Z en las cuales pueda desarrollarse $f(z)$ en potencias de z .
- Desarrolle $f(z)$ en cada zona, indicando su región de convergencia.
- Aproxime cada sumatoria hasta los términos de segundo grado inclusive y haga lo siguiente:
 - Observando las series, diga en qué zona tiene sólo potencias positivas, en cuál sólo potencias negativas y en cuál tiene potencias tanto positivas como negativas de z .
 - Para $z = 0,1$ calcule el valor de $f(z)$ y de cada una de las sumatorias aproximadas. ¿Cuáles de las sumatorias convergen a $f(z)$ para el valor de z dado?
 - Haga lo mismo que en el punto anterior pero para $z = j$.
¿Qué sucede en este caso? ¿Hay alguna serie de las ya calculadas que converja a $f(j)$?
¿Por qué?

12) Para las siguientes funciones:

- Grafique todas las zonas del plano z donde pueda desarrollarse $f(z)$ alrededor del punto " a " dado.
- Obtenga las series correspondientes a las zonas que determinó en el inciso anterior e indique las regiones de validez de dichas series.

a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^{15}(z-3)}$, $a = 1$

b) $f(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^3}$, $a = 0$

c) $f(z) = e^z \sin(z)$, $a = 0$

d) $f(z) = \sin\left[\frac{1}{z-1}\right]$, $a = 1$

e) $f(z) = \frac{z-1}{z^2 - 6z + 5}$, $a = 1$

- De las series que desarrolló en el ejercicio anterior, observe las potencias negativas en la zona cercana y diga qué tipo de punto es el que se encuentra en el centro de la serie y cuánto vale su residuo.
- Si se suman dos series de potencias, una con región de convergencia $|z| < 3$ y otra con región de convergencia $|z| > 1$, ¿cuál será la región de convergencia de la suma de estas dos series?
- Dada la siguiente función:

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)(z - 1 - j)}$$

a) Halle sus singularidades.

- b) Grafique todas las regiones en las que es posible hallar un desarrollo en series de potencias de $z-1-j$.
 c) Halle todos los desarrollos posibles indicando analítica y gráficamente su región de convergencia.

16) Estudie el carácter de las singularidades de la siguiente función a partir del correspondientes desarrollo en serie: $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z}$.

Repita el estudio para todas las funciones del Ejercicio 1)

17) Calcular las siguientes integrales aplicando residuos:

a) $\int_C \frac{1}{\operatorname{Sh}(z)} dz$ con $C: |z| = 4$

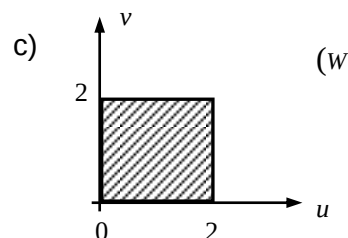
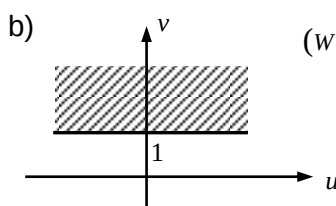
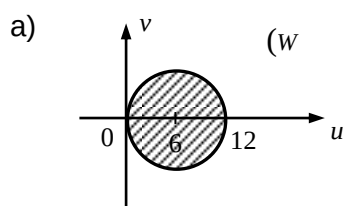
b) $\int_C \frac{1}{z^3 - 2z^2 + 2z} dz$ siendo C el contorno del recinto: $x+y \leq 3$, $x+y \geq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

c) $\int_C \operatorname{sen}\left(\frac{z}{z+1}\right) dz$ siendo C el contorno del recinto: $y^2 \leq x+2$, $x \leq 0$

Matemática Avanzada TRABAJO PRÁCTICO N° 1 Respuestas a los ejercicios

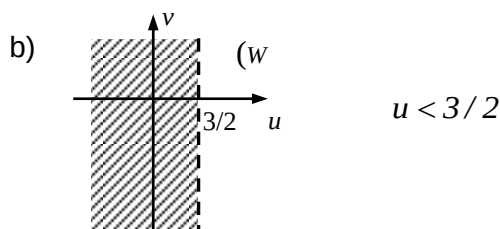
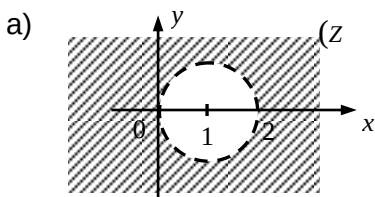
- 1)**
- a) $z = 0$ y $z = \pm 1$ son polos de primer orden (o simples).
 - b) $z = 1$ es polo de segundo orden (o doble).
 - c) $z = 3$ es singularidad evitable, $z = -3$ es polo simple, $z = 0$ es polo doble.
 - d) $z=0$ es un polo de quinto orden.
 - e) $z=0$ es una singularidad evitable.
 - f) $z=0$ es una singularidad esencial.

2)



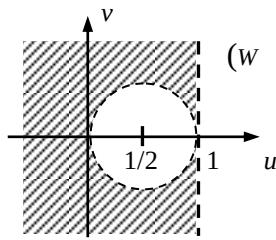
- 3)** a) $(u-6)^2 + v^2 \leq 36$ b) $v \geq 1$ c) $0 \leq v \leq 2$, $0 \leq u \leq 2$

5)



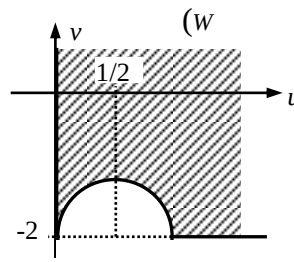
6)

a)



$$(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 > \frac{1}{4} \quad , \quad u < 1$$

b)



$$(u - \frac{1}{2})^2 + (v + 2)^2 \geq \frac{1}{4} \quad , \quad u \geq 0 \quad , \quad v \geq -2$$

7) $w = j \frac{(1-z)}{(1+z)}$

8) $I = e^{2(1+j)} - 1$, para los tres incisos.

9) $I = 0$

10) $a_1) -2\pi j$ $a_2) 0$

$b_1) \frac{3}{2}\pi j$ $b_2) 2\pi j$ $b_3) 0$

c) $\pi [t \cos(t) - \sin(t) + j t \sin(t)]$

d) $\frac{\pi}{25} j [5 \cos(1) - \sin(1)]$

e) $-\pi j$

11) b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] z^n \quad \text{si } |z| < 1$

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} z^n \quad \text{si } 1 < |z| < 2$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [2^n - 1] z^{-(n+1)} \quad \text{si } |z| > 2$$

c) $S_1(z) \cong \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 \quad |z| < 1$

$$S_2(z) \cong - \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 \right) \quad 1 < |z| < 2$$

$$S_3(z) \cong \frac{1}{z^2} \quad |z| > 2$$

12) a) $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} (z-1)^{n-15}$ si $0 < |z-1| < 2$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-1)^{-(n+16)} \quad \text{si } |z-1| > 2$$

b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} z^{2n}$ si $0 < |z| < \infty$

c) $f(z) = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+j)^n - (1-j)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{4}\right) z^n \quad \forall z$

d) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} (z-1)^{-2n+1}$ si $|z-1| > 0$

e) $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} (z-1)^n$ si $0 < |z-1| < 4$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (z-1)^{-(n+1)} \quad \text{si } |z-1| > 4$$

13) a) Polo de orden 15, Residuo $b_1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$.

b) Singularidad evitable, Residuo $b_1 = 0$.

c) Punto regular, Residuo $b_1 = 0$.

d) Punto regular, Residuo $b_1 = 0$.

e) Singularidad esencial, Residuo $b_1 = 1$.

f) Singularidad evitable, Residuo $b_1 = 0$.

15) a) Singularidades: $z = 1+j$ $z = j$ $z = -j$.

b) Zona cercana: $0 < |z-1-j| < 1$.

Zona intermedia: $1 < |z-1-j| < \sqrt{5}$.

Zona lejana: $|z-1-j| > \sqrt{5}$.

c) $f(z) = \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(1+2j)^{n+1}} - 1 \right) \left((z-j-1)^n + (1+j)(z-j-1)^{n-1} \right)$ $0 < |z-1-j| < 1$

$$f(z) = \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(1+j)(z-j-1)^{n-1}}{(1+2j)^{n+1}} - \frac{1+j}{(z-j-1)^{n+2}} + \frac{(z-j-1)^n}{(1+2j)^{n+1}} - \frac{1}{(z-j-1)^{n+1}} \right) \quad 1 < |z-1-j| < \sqrt{5}$$

$$f(z) = \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left((1+2j)^n - 1 \right) \left(\frac{1+j}{(z-j-1)^{n+2}} - \frac{1}{(z-j-1)^{n+1}} \right) \quad |z-1-j| > \sqrt{5}$$

16) Singularidad esencial.

Ejercicio 1: Como se pide estudiar el carácter de cada singularidad se hacen los desarrollos en serie sólo en la **zona cercana** alrededor de cada punto singular.

a) $z=0$ $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n + 1) z^{n-1}$ $0 < |z| < 1$ $z=0$ es un polo de primer orden con $b_1=1$ ($n=0$)

$z=1$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - (-1)^n \right) (z-1)^{n-1}$ $0 < |z-1| < 1$ $z=1$ es un polo de primer orden con $b_1= -1/2$

$z=-1$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right) (z+1)^{n-1}$ $0 < |z+1| < 1$ $z=-1$ es un polo de primer orden, con $b_1= -1/2$

b) $z=1$ $f(z) = (z-1)^3 + 5(z-1)^2 + 10(z-1) + 10 + \frac{5}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2}$

$z=1$ es un polo de segundo orden con $b_1= 5$

c) $z=0$ $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n + 1}{3^{n+1}} z^{n-2} - \frac{(-1)^n + 1}{3^{n+2}} z^{n-1} \right)$ $0 < |z| < 3$

Es un polo de segundo orden; $b_1= -1/9$

$z=3$ $f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{n+1}{3^{n+2}} \right) (z-3)^n$ $|z-3| < 3$

Es una singularidad evitable; $b_1= 0$

$z=-3$ $f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6^n} + \frac{2n}{3^n} \right) (z+3)^{n-1} - \left(\frac{1}{6^{n+1}} + \frac{n}{3^{n+1}} \right) (z+3)^n$ $0 < |z+3| < 3$

Es un polo de segundo orden; $b_1= 1/9$

d) $z=0$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} z^{2n-5}$ $|z| > 0$ es un polo de quinto orden; $b_1= 0$

e) $z=0$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n$ $|z| > 0$ es una singularidad evitable; $b_1= 0$

f) $z=0$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z} \right)^n$ $|z| > 0$ es una singularidad esencial; $b_1= 1$

17) a) $-2\pi j$

b) $\frac{\pi}{2} (1-j)$

c) $-2\pi j \cos(1)$

MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO PRÁCTICO N° 2

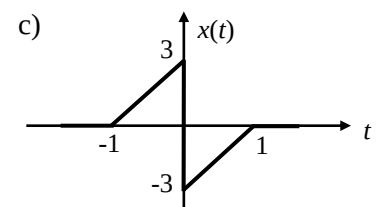
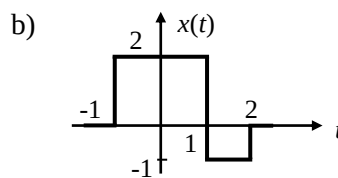
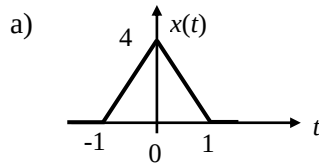
Sistemas Lineales - Análisis de Señales - Convolución

DESCRIPCIÓN DE SEÑALES: FUNCIONES RAMPA, ESCALÓN Y DELTA DE DIRAC

1) Grafique las siguientes funciones del tiempo.

a) $u_s(2t + 1)$ b) $r(2 - t)$ c) $u_s(t) u_s(1 - t)$ d) $P_3(t-2)$ e) $r(t)-2r(t-1)$

2) Escriba una representación matemática para cada una de las siguientes señales, en términos de la funciones escalón y rampa unitarios.



3) Representar gráficamente cada una de las siguientes funciones.

a) $e^{-at} \delta(t-1)$ b) $2 u_s(t) + 3 \delta(t-2)$ c) $\sin(t) \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ d) $u_s(1-t) \delta(t+2)$

4) Evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\infty} \delta(t-2) \cos(\omega(t-3)) dt$ b) $\int_0^{\infty} t u_s(2-t) u_s(t) dt$ c) $\int_0^{\infty} e^{-2t} \delta(\lambda-t) \delta(\lambda-2) d\lambda$

d) $\int_0^{\infty} (t^4 + 6t^3 - 5t^2 - 2) \delta'(t-1) dt$ e) $\int_0^{\infty} \cos(\omega(t-3)) \delta''(t-2) dt$

Señales periódicas

5) Indique si las siguientes señales de tiempo continuo son periódicas o no. En caso afirmativo determine su período y frecuencia fundamental en rad/s y en Hz.

a) $x(t) = 2\sin(20\pi t)$ b) $y(t) = \sin(4\pi t) + \sin(8\pi t)$ c) $z(t) = x_1(t) + x_2(t)$ con $x_1(t)$ de período $T_1=2$
 $x_2(t)$ de período $T_2=\sqrt{3}$

Señales pares e impares

6) Dada las siguientes señales:

$x_1=1$ $-1 < t < 1$
 $x_2=t^3$ para todo t
 $x_3=t^2$ para todo t
 $x_4=t$ $-1 < t < 1$

- a) Grafíquelas y clasifíquelas en pares o impares.
b) Haga, analítica y gráficamente, los siguientes productos y clasifique los resultados como

funciones pares o impares:

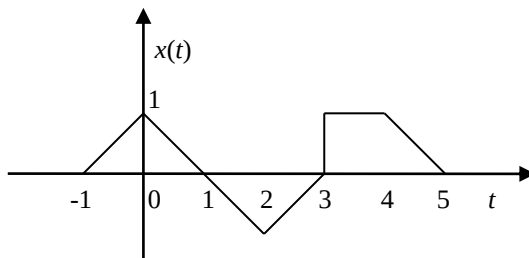
i) $y_1(t) = x_1(t)x_3(t)$

ii) $y_2(t) = x_1(t)x_4(t)$

iii) $y_3(t) = x_2(t)x_4(t)$

c) ¿Qué conclusiones obtiene a partir del inciso b)?

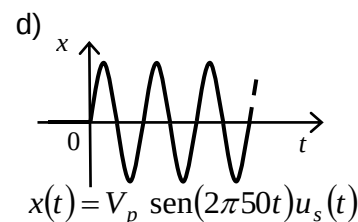
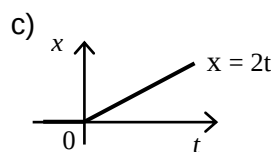
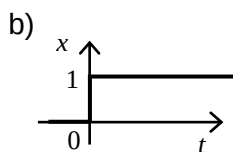
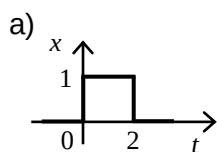
7) Considere la siguiente señal:



Muestre **gráficamente** que $x(t)$ puede escribirse como la suma de una función par, $x_p(t)$, y una función impar, $x_i(t)$, siendo $x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$ y $x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$.

Análisis de Señales, Potencia y Energía

8) Calcule la potencia media y la energía de las siguientes señales en el intervalo de tiempo donde son distintas de cero. Clasifíquelas en señales de potencia, energía o de orden superior, usando las pruebas matemáticas previstas para tal fin.



9) Encuentre las señales que resultan de las siguientes operaciones y clasifíquelas como de energía o de potencia.

a) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ para $x(t)$ como en 2.b) y 2.c)

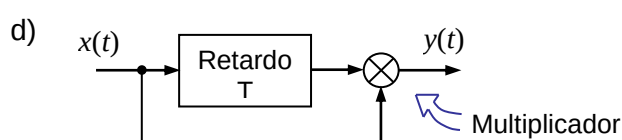
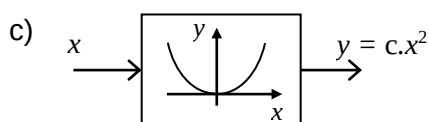
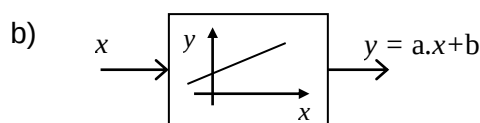
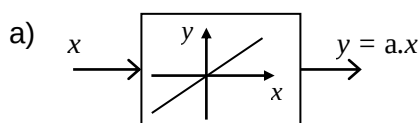
b) $x(3t)$, $x(t/3)$ y $x(t+3)$ con $x(t)$ como en 8.a) y 8.c)

Observe el inciso a), ¿Cuál le parece que es la condición de la señal $x(t)$ que hace que la señal $y(t)$ sea de energía o de potencia?

ANÁLISIS DE SISTEMAS

Linealidad

10) Verificar si los siguientes sistemas son lineales o no.



e) $y''(t) - 7y'(t - 5) + 10y(t) = x(t)$

f) $\ln(y') + 2y = x$

Propiedad de Memoria

11) Decir cuales de estos sistemas tienen memoria y cuales no. Justifique.

a) $y(t) = 3x(t)$

b) $y(t) = x(t) + 3x(t - 2) + 8x(t - 5)$

c) $v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$

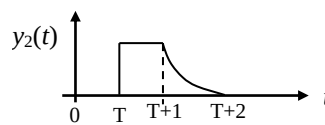
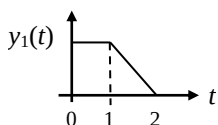
d) $3y''(t) + 2ty'(t) + y(t) = x(t)$

$i(t)$ es la entrada

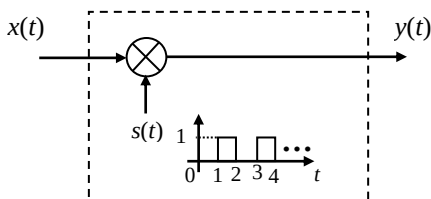
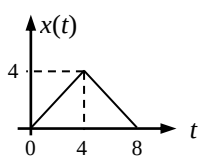
$v(t)$ es la salida

Invariancia en el tiempo

12) Se ingresa con una señal $x(t)$ y se obtiene una salida $y_1(t)$, luego se ingresa con la misma señal pero desplazada en T segundos, $x(t-T)$, y se obtiene una salida $y_2(t)$. Según las señales $y_1(t)$ e $y_2(t)$ mostradas, ¿el sistema es invariante en el tiempo? Justifique.



13) Se ingresa al siguiente sistema con la señal $x(t)$ mostrada en la figura. El sistema consta de un multiplicador y una señal interna $s(t)$ periódica de período $T=2$. Se pide:



a) Graficar la salida $y(t)$ para la entrada $x(t)$ mostrada.

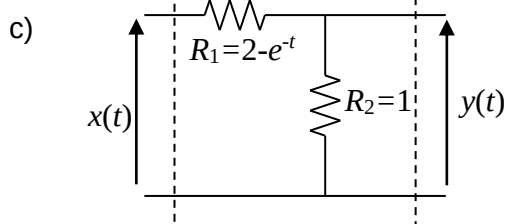
b) Graficar la salida $y(t)$ si se desplaza la misma señal $x(t)$ en 3 s, es decir, la entrada es $x(t-3)$.

c) Comparar los gráficos de los incisos a) y b). ¿El sistema es invariante en el tiempo? Justifique.

14) Dados los siguientes sistemas indique por observación si son o no invariantes en el tiempo. Justifique.

a) $y''(t) + 9y'(t) + y(t) = x(t)$

b) $2\cos(t)y'(t) + 5y(t) = 0$



Respuesta temporal. Respuesta al impulso. Convolución

15) Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales que representan sistemas lineales e invariantes en el tiempo, y las condiciones iniciales especificadas a continuación, hallar las respuestas homogénea y total del sistema cuando la entrada es la indicada en cada caso:

a) $(D^2 + 8D + 15)y(t) = x(t)$

con $y(0) = 2$ $y'(0) = -12$

$x(t) = \cos(t)$

b) $(D^3 + 3D^2 + 2D)y(t) = x(t)$

con $y(0) = y'(0) = 0$ $y''(0) = -3/2$

$x(t) = e^{-3t}$

c) $(4D + 1)y(t) = x(t)$

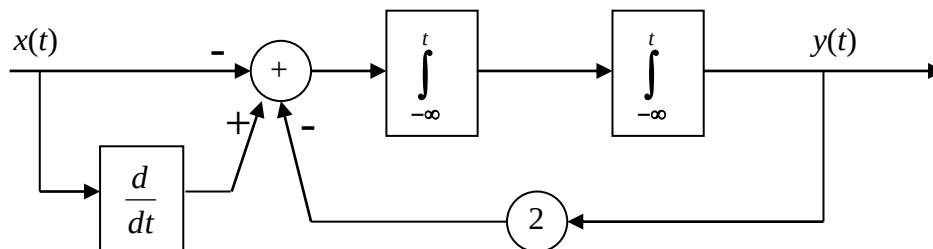
con $y(0) = 0$

$x(t) = 3$

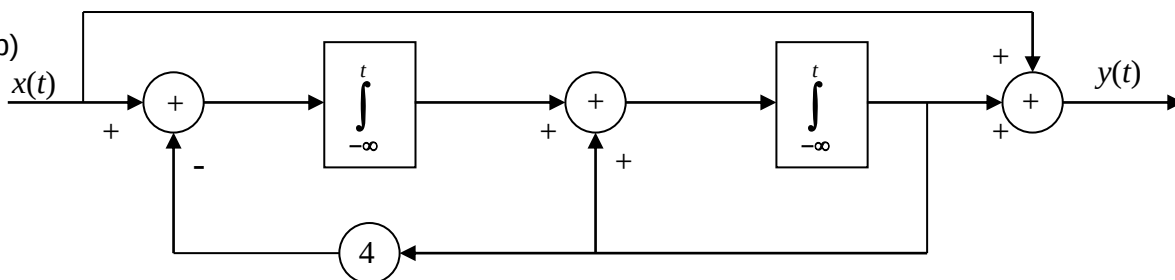
d) Obtenga los diagramas en bloques de los sistemas b) y c).

16) Encuentre la ecuación diferencial de los sistemas LIT representados por los diagramas en bloques siguientes:

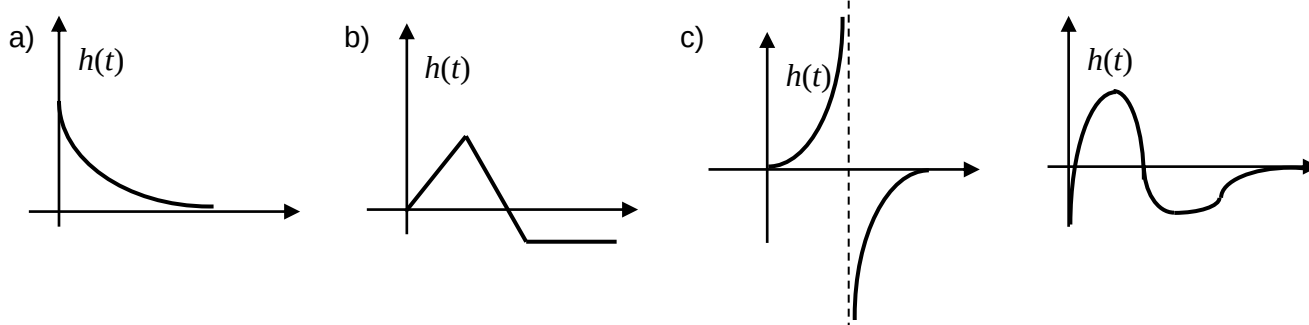
a)



b)



17) Observe los siguientes gráficos de respuestas al impulso de sistemas lineales y diga qué sistemas son estables y cuáles no. Justifique.



18) Calcular las siguientes convoluciones :

a) $u_s(t) * e^t u_s(t)$

b) $e^t u_s(t) * e^{3t} u_s(t)$

c) $f(t) * \delta(t - t_0)$

d) $\sin(2t)u_s(t) * e^{-t} u_s(t)$

e) $\sin(2t)u_s(t) * \cos(3\pi t) u_s(t)$

19) Halle el resultado de la siguiente convolución:

$$y(t) = P_4(t - 2) * e^t u_s(t)$$

Puede usar el resultado de lo hallado en 18.a) recordando que $P_4(t - 2) = u_s(t) - u_s(t - 4)$.

20) Hallar la función operacional, $H(D)$, y la respuesta al impulso de los sistemas representados por las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(D^2 + 6D + 10) y(t) = x(t)$

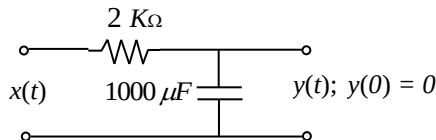
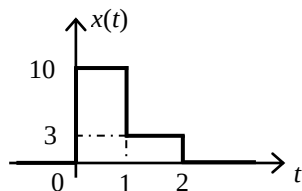
b) $(2D^2 + 4D - 16) y(t) = x(t)$

c) $(D^3 + 6D^2 + 12D + 8) y(t) = (D - 1) x(t)$

d) $(D^2 + 4D + 5) y(t) = (D^2 - 1) x(t)$

Analizar la estabilidad de cada uno observando las raíces de la ecuación característica y también integrando la respuesta al impulso.

21) Dado el siguiente sistema:

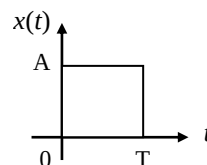
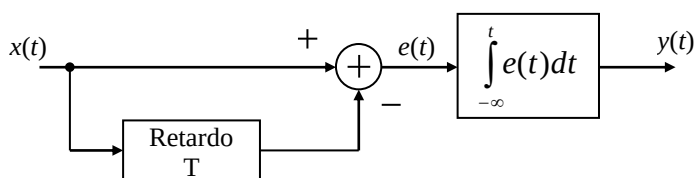


$1 \text{ K}\Omega = 1000 \Omega$ (Ohms)
 $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ (Faradios)
 Ohms x Faradios = segundos

Se pide lo siguiente:

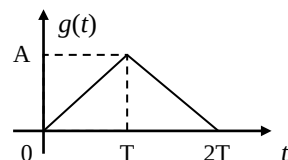
- Halle la ecuación diferencial que representa al sistema y a partir de ella dibuje un diagrama en bloques del mismo.
- Determine la respuesta al impulso del sistema, $h(t)$. ¿Qué valor debe tener el coeficiente que acompaña a la derivada de mayor orden en la ecuación diferencial para calcular la $h(t)$?
- Halle la respuesta al escalón.
- Encuentre, utilizando lo hallado en c), la salida debida a la entrada $x(t)$ mostrada arriba con condiciones iniciales nulas. Recuerde que esta es la denominada **solución forzada**.
- ¿La convolución contempla el hecho de tener condiciones iniciales distintas de cero? ¿Cómo se modifica la respuesta calculada en el inciso anterior si $y(0) = 5\text{V}$. [Aplique superposición]
- ¿Qué nombre recibe la respuesta que se sumó a la forzada para obtener la solución total del inciso d)?

22) Dado el sistema definido mediante el siguiente diagrama en bloques:



23) La respuesta al escalón de un sistema, es la señal $g(t)$ que se muestra.

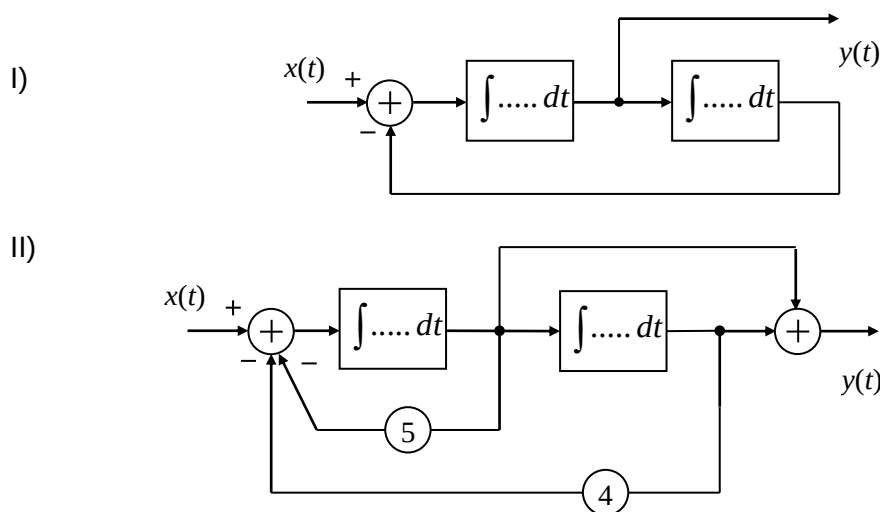
- ¿Qué relación hay entre la respuesta al impulso y la respuesta al escalón?
- Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ a partir de la $g(t)$. Grafique $h(t)$.
- Calcule y grafique la respuesta a la entrada $x(t) = u_s(t) - u_s(t - T)$ [Use la $g(t)$]



24) Emplee la función respuesta al impulso para expresar la salida del sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial a una $x(t)$ causal cualquiera. El sistema tiene energía almacenada (condiciones iniciales NO nulas).

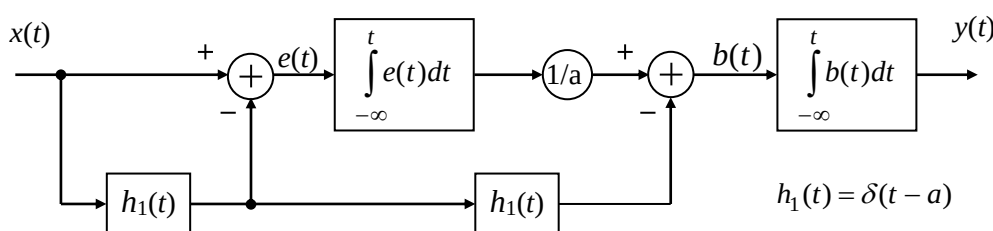
$$(D^2 + \omega_o^2)y(t) = x(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad y(0) = 8 \quad , \quad y'(0) = 0$$

25) Dados los diagramas en bloque de las siguientes figuras:



- Encuentre la ecuación diferencial que modela al sistema.
 - Halle la respuesta al impulso del sistema.
 - Halle la respuesta al escalón usando la respuesta al impulso calculada en el inciso anterior.
 - Halle la respuesta en régimen permanente utilizando la función operacional para:
 - Sistema I: $x(t) = e^{j2t}$.
 - Sistema II: $x(t) = \sin(3t)$.
 - Verifique el resultado del inciso anterior utilizando el método de los coeficientes indeterminados (ver Ej. 15).
- Nota: para el inciso a) use el operador D .

26) Dado el diagrama en bloques de la figura:

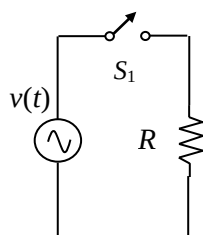


- Encuentre en forma directa la respuesta al impulso del sistema.
- Encuentre la respuesta del sistema a la función rampa unitaria.

27) En el circuito siguiente se conecta un generador de tensión de onda senoidal durante un tiempo t_1 y luego se desconecta. Se pide lo siguiente:

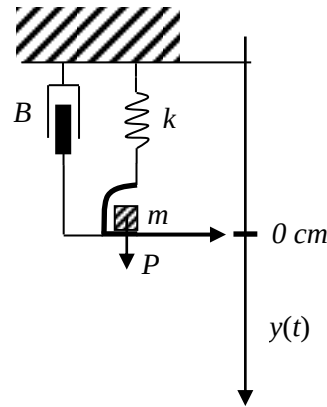


$$v(t) = V_p \sin(\omega_0 t) u_s(t)$$



- Encuentre la expresión de la energía absorbida por la resistencia en función del tiempo t_1 .
- Calcule la potencia media (P_m) como el cociente de la energía consumida en t_1 segundos y ese tiempo t_1 .
- Grafique la Potencia media en función de $\omega_0 t_1$ y diga a que valor tiende cuando $\omega_0 t_1 \rightarrow \infty$.
- Calcule ahora la potencia media en un sólo período y compare con lo calculado en c).

- 28) La figura muestra el esquema básico de una balanza. La misma está compuesta por un resorte, un amortiguador y una bandeja donde se coloca el peso a determinar, y adosada a ésta una aguja indicadora del peso sobre el eje "y".



Al colocar la masa m la bandeja se desplaza una distancia $y(t)$. El comportamiento del sistema es gobernado por la siguiente ecuación diferencial:

$$(M + m)y''(t) + B y'(t) + k y(t) = mg ,$$

donde $M=1 \text{ Kg}$ es la masa de la bandeja y todo lo que se mueve con la aguja indicadora.

$m=5 \text{ Kg}$ es la masa a pesar.

$B=40 \text{ Kg/s}$ es la constante del amortiguador.

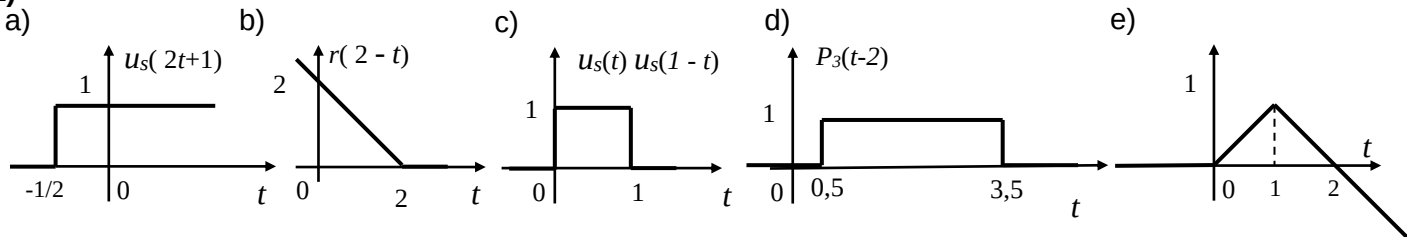
$k=980 \text{ Kg/s}^2$ es la constante del resorte.

$g=9,8 \text{ m/s}^2$ gravedad.

Resuelva la ecuación diferencial y grafique en forma aproximada la respuesta $y(t)$. Considere $y(0) = y'(0) = 0$. Identifique los regímenes transitorio y permanente.

Matemática Avanzada TRABAJO PRÁCTICO N° 2 Respuestas a los ejercicios

1)



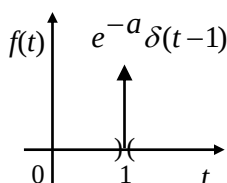
2)

a) $x(t) = 4 r(t+1) u_s(-t) + 4r(1-t) u_s(t) = 4r(t+1)-8r(t)+4r(t-1)$

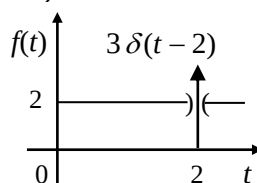
b) $x(t) = 2 u_s(t+1) - 3 u_s(t-1) + u_s(t-2)$

c) $x(t) = 3 r(t+1) u_s(-t) - 3r(1-t) u_s(t)$

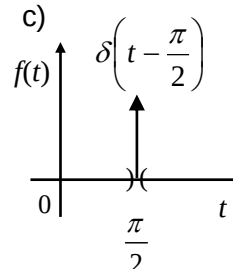
3) a)



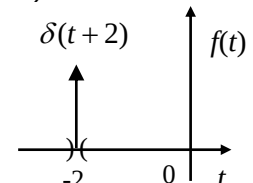
b)



c)



d)



4) a) $\cos(\omega)$ b) 2 c) $e^{-4}\delta(t-2)$ d) -12 e) $-\omega^2 \cos(\omega)$

5) a) $T=1/10$ s $\omega_0=20\pi$ rad/s $f_0=10$ Hz
 b) $T=1/2$ s $\omega_0=4\pi$ rad/s $f_0=2$ Hz
 c) $z(t)$ es no periódica.

6) a) x_1 par; x_2 impar; x_3 par; x_4 impar.
 b) i) par
 ii) impar
 iii) par

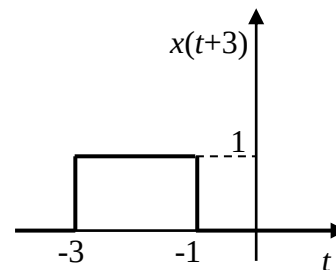
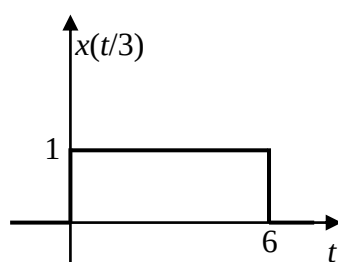
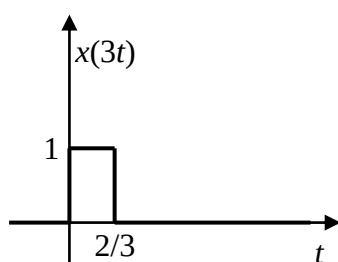
8) a) $\begin{cases} E = 2 \\ P_m = 1 \end{cases}$ señal de Energía b) $\begin{cases} E = \infty \\ P_m = 1 \end{cases}$ señal de Potencia

c) $\begin{cases} E = \infty \\ P_m = \infty \end{cases}$ señal de Orden Superior d) $\begin{cases} E = \infty \\ P_m = V_p^2 / 2 \end{cases}$ señal de Potencia

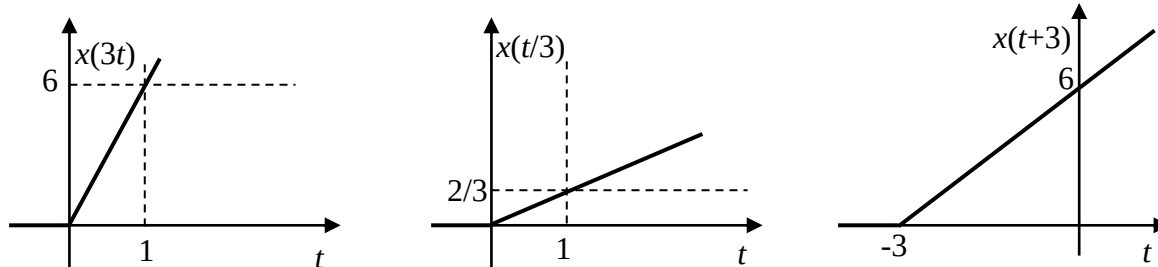
9) a) 2.b) $y(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 2t+2 & -1 \leq t < 1 \\ 5-t & 1 \leq t < 2 \\ 3 & t \geq 2 \end{cases}$ Señal de potencia

2.c) $y(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 3\left(\frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}\right) & -1 \leq t < 0 \\ 3\left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$ Señal de energía

b) 8.a)



8.c)



10) a) y e) son lineales, los demás son no lineales.

11) a) sin memoria, los demás con memoria.

12) Variante en el tiempo.

13) c) variante en el tiempo.

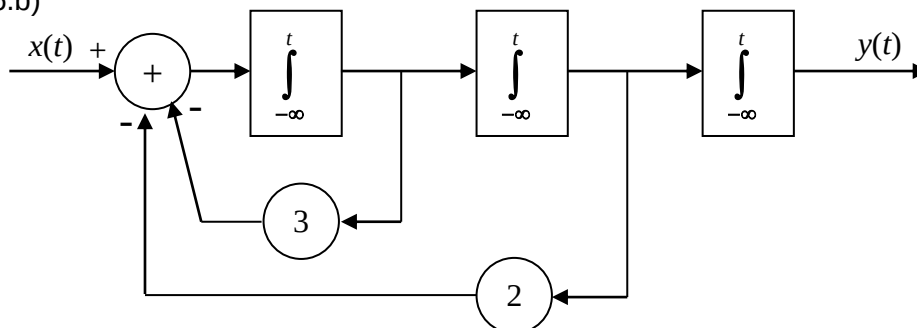
14) a) invariante, b) y c) variante en el tiempo.

15) a) $y_h(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-5t}$ $y(t) = -\frac{299}{260} e^{-3t} + \frac{805}{260} e^{-5t} + \frac{7}{130} \cos(t) + \frac{4}{130} \sin(t)$

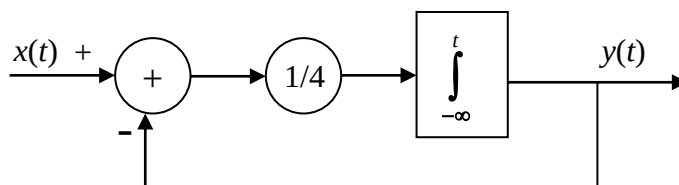
b) $y_h(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t}$ $y(t) = -\frac{7}{12} + e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{6} e^{-3t}$

c) $y_h(t) = c_1 e^{-t/4}$ $y(t) = (3 - 3e^{-t/4}) u_s(t)$

d) 16.b)



16.c)



16) a) $y''(t) + 2y(t) = x'(t) - x(t)$

b) $y''(t) - y'(t) + 4y(t) = x''(t) - x'(t) + 5x(t)$

17) a) y d) estables; b) y c) inestables.

18) a) $(e^t - 1) u_s(t)$ b) $\frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) u_s(t)$ c) $f(t - t_0)$

d) $\frac{1}{5}(2e^{-t} - 2\cos(2t) + \sin(2t))u_s(t)$ e) $\frac{2}{5}(\cos(2t) - \cos(3t))u_s(t)$

19) $y(t) = (1 - e^t)u_s(t) - (1 - e^{t-4})u_s(t-4)$

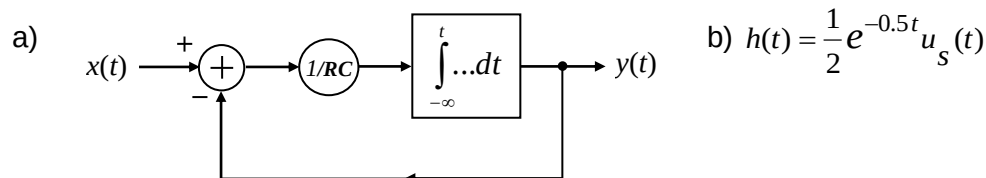
20) a) $H(D) = \frac{1}{D^2 + 6D + 10}$, $h(t) = e^{-3t}\sin(t)u_s(t)$, estable.

b) $H(D) = \frac{1}{2D^2 + 4D - 16}$, $h(t) = \frac{1}{12}(e^{2t} - e^{-4t})u_s(t)$, inestable.

c) $H(D) = \frac{D-1}{D^3 + 6D^2 + 12D + 8}$, $h(t) = (t - \frac{3}{2}t^2)e^{-2t}u_s(t)$, estable.

d) $H(D) = \frac{D^2 - 1}{D^2 + 4D + 5}$, $h(t) = e^{-2t}(2\sin(t) - 4\cos(t))u_s(t) + \delta(t)$, estable.

21)



c) Respuesta al escalón: $g(t) = (1 - e^{-t/2})u_s(t)$

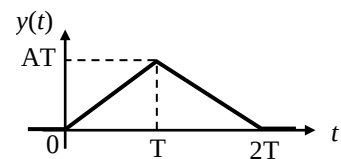
d) $y_f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10(1 - e^{-t/2}) & 0 \leq t < 1 \\ 3 + 1.5410e^{-t/2} & 1 \leq t < 2 \\ 9.6959e^{-t/2} & t \geq 2 \end{cases}$

Esta solución puede hallarse por convolución de la entrada con la respuesta al impulso o, a partir de la respuesta al escalón, considerando la entrada como una suma de escalones de diferentes alturas y aplicando superposición.

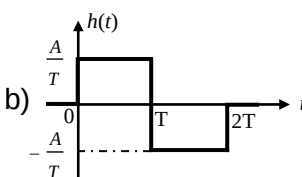
e) $y(t) = 5e^{-0.5t}u_s(t) + y_f(t)$

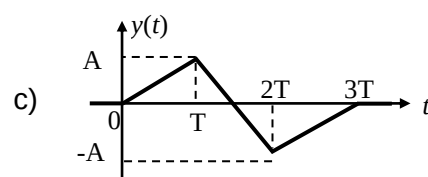
22) a) $h(t) = u_s(t) - u_s(t-T)$

b) Respuesta forzada $y(t) = \begin{cases} At & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ A(2T - t) & \text{si } T \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$



23)

a) $h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$ b) 



24) $y(t) = 8\cos(\omega_o t)u_s(t) + \int_0^t \frac{1}{\omega_o} \sin(\omega_o(t-\lambda))x(\lambda)d\lambda$

25)

I)

a) $y'' + y = x'$

b) $h(t) = \cos(t) u_s(t)$

c) $g(t) = \sin(t) u_s(t)$

d) $y_p(t) = -\frac{2j}{3} e^{2jt}$

II)

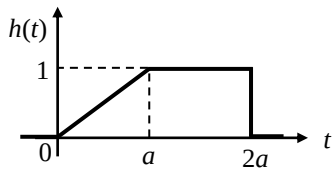
a) $y'' + 5y' + 4y = x' + x$

b) $h(t) = e^{-4t} u_s(t)$

c) $g(t) = \frac{1}{4} (1 - e^{-4t}) u_s(t)$

d) $y_p(t) = \frac{4}{25} \sin(3t) - \frac{3}{25} \cos(3t)$

26)



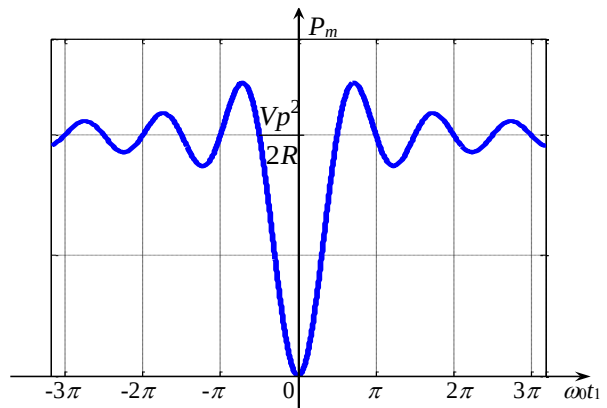
27)

a) $E = \frac{V_p^2}{2R} t_1 [1 - \text{sinc}(2\omega_0 t_1)]$

b) $P_m = \frac{V_p^2}{2R} [1 - \text{sinc}(2\omega_0 t_1)]$

c) $P_m \rightarrow \frac{V_p^2}{2R}$

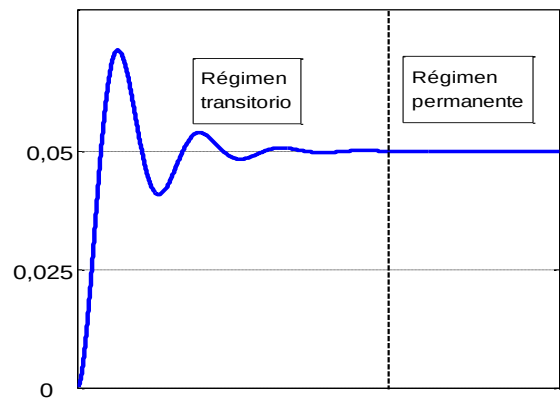
d) $P_m = \frac{V_p^2}{2R}$



28)

$$y(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\alpha t} [\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta t)]) u_s(t)$$

con $\alpha = \frac{B}{2(m+M)}$ $\beta = \frac{\sqrt{B^2 - 4(m+M)k}}{2(m+M)}$



MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

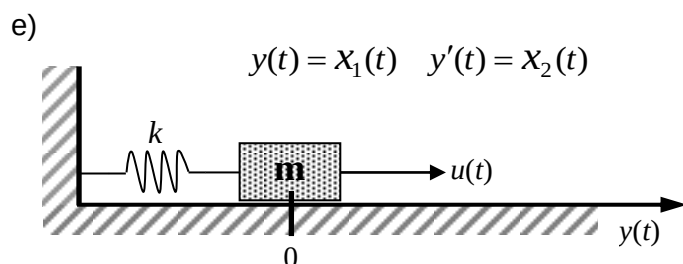
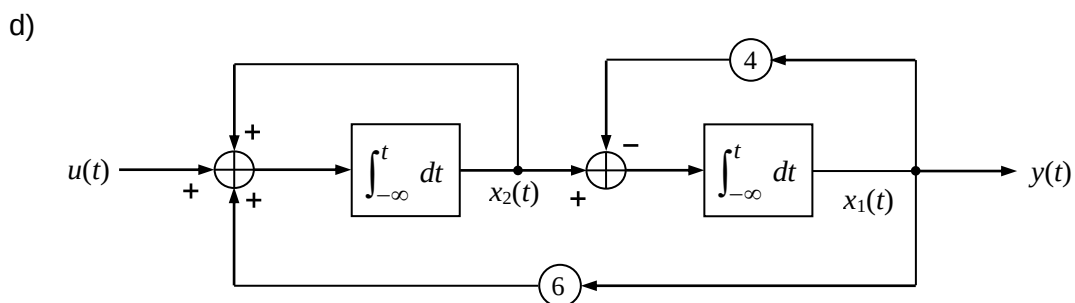
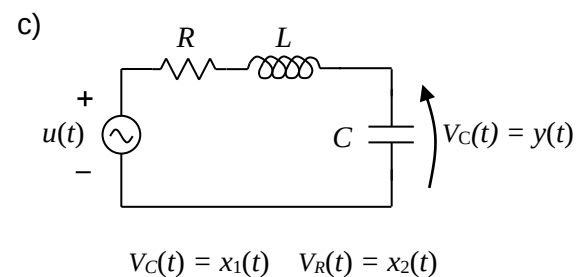
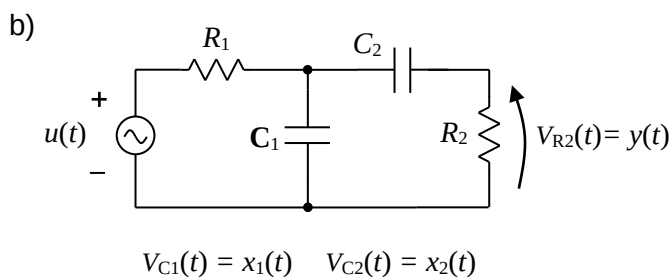
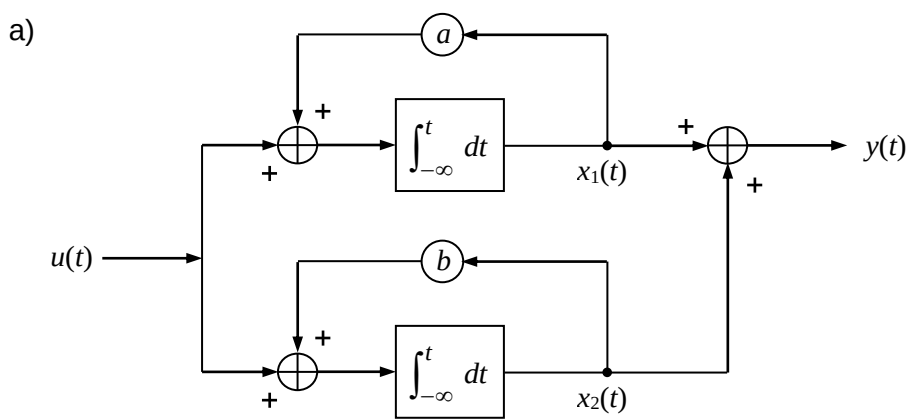
Variable de Estado

1) Convierta las siguientes ecuaciones diferenciales en sistemas de ecuaciones de variable de estado, tomando como $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$ $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$

a) $y'''(t) + 2y''(t) + 3y'(t) + y(t) = m(t)$

b) $y'''(t) + 5y'(t) = q(t)$

2) Escriba las ecuaciones de variable de estado para cada uno de los siguientes sistemas considerando que $u(t)$ e $y(t)$ son la entrada y la salida respectivamente en todos los casos.



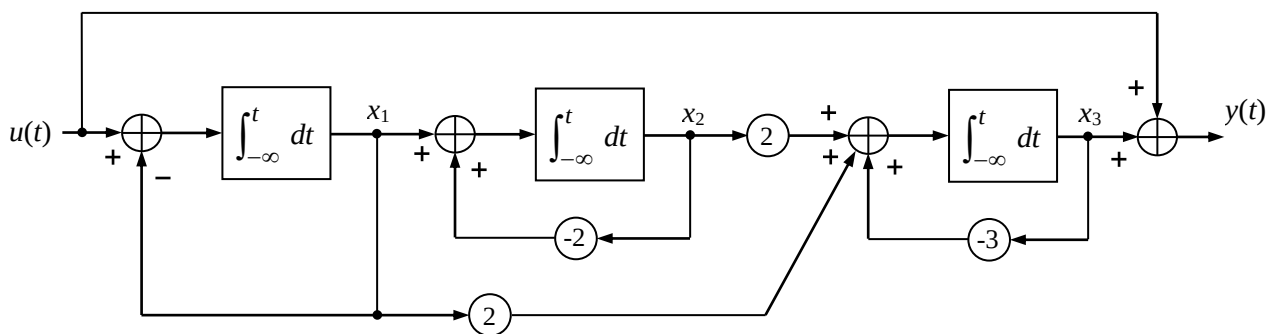
Plantee la ecuación diferencial si se aparta la masa de su posición de reposo y luego se suelta
 Recuerde: $\sum F = m.a$
 $u(t)$ es una fuerza.

3) Encontrar la expresión de e^{At} para cada una de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

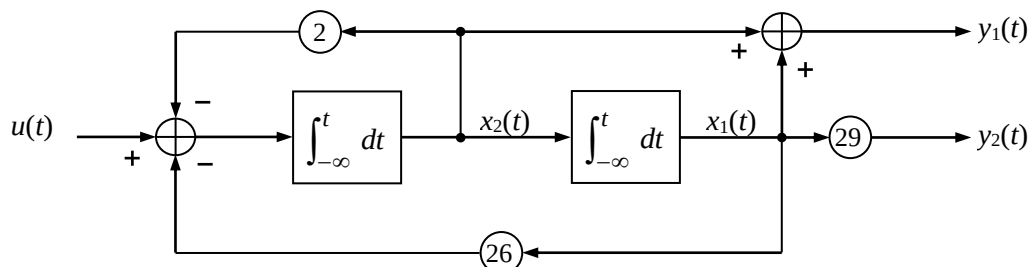
4) Para el diagrama en bloques mostrado en la figura, hallar:

- Las matrices A , B , C , D de la descripción con variable de estado.
- La matriz e^{At} .
- La respuesta al impulso, $h(t)$. ¿Es de esperar una $\delta(t)$ en $h(t)$? Justifique.
- La respuesta al escalón, $g(t)$.
- La solución libre del vector de estados, $x_i(t)$, cuando las condiciones iniciales de los estados son: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ y $x_3(0) = 3$.
- La respuesta libre del sistema a las condiciones iniciales del inciso anterior.
- La respuesta del sistema para $u(t) = \cos(2t) u_s(t)$ con las condiciones iniciales dadas en el inciso e)



5) Para el diagrama en bloques mostrado en la figura, hallar:

- Las matrices A , B , C y D de la descripción con variable de estado.
- La matriz e^{At} .
- La solución libre del vector de estados, $x_i(t)$, cuando las condiciones iniciales para los estados son: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 5$.
- La salida, $y_i(t)$, en respuesta a las condiciones iniciales del inciso anterior.
-



6) Para el diagrama en bloques del ejercicio 24. I) de la guía 2 de sistemas lineales:

- Encuentre las ecuaciones de variable de estado
- Repita el inciso b) del mencionado ejercicio usando el modelo en VE.

7) Considere los ejercicios 2.c) y 2.d)

a) Encuentre un nuevo modelo en variable de estados considerando la transformación dada por:

$$v_1(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

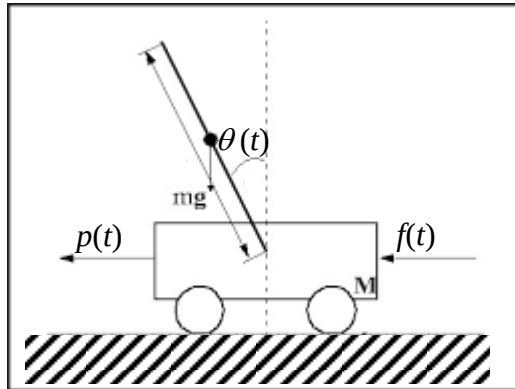
$$v_2(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

b) Para 2.d) halle la transformación por autovalores.

Ejercicio propuesto:

El carrito con péndulo invertido de la figura está impulsado por una fuerza $f(t)$. Para valores pequeños del ángulo $\theta(t)$ las ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}(t) &= \theta(t) + f(t) \\ \ddot{p}(t) &= a\theta(t) - f(t)\end{aligned}$$



Donde la respuesta del sistema es $p(t)$, el desplazamiento horizontal.

Escriba un sistema en variables de estado tal que las variables de estado 1 y 3 sean:

$$x_1(t) = \theta(t); \quad x_3(t) = p(t).$$

MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO PRÁCTICO N° 3

Respuesta a los Ejercicios

1) a)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} m(t) \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} q(t) \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2)

a)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_p C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

c)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{RC} \\ -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{0}{R} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

e)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{0}{1} \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

3)

a)
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ e^{3t} - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

b)
$$e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 2(e^{-t} - e^{-2t}) & e^{-2t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \text{d) } e^{At} = \begin{bmatrix} e^{8t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-7t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

4)

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 0 \quad 1) \quad D = 1$$

$$\text{b) } e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ 2(e^{-t} - e^{-2t}) & 2(e^{-2t} - e^{-3t}) & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } h(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t}) u_s(t) + \delta(t) \quad \text{d) } g(t) = (2 + e^{-2t} - 2e^{-t}) u_s(t)$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} + e^{-3t} \end{pmatrix} u_s(t) \quad \text{f) } y_l(t) = (2e^{-t} + e^{-3t}) u_s(t)$$

$$\text{g) } y(t) = \left[\frac{8}{5} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} + e^{-3t} + \frac{1}{10} (3 \sin(2t) + 9 \cos(2t)) \right] u_s(t)$$

5)

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -26 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 29 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(5t) + \frac{1}{5} \sin(5t) & \frac{1}{5} \sin(5t) \\ -\frac{26}{5} \sin(5t) & \cos(5t) - \frac{1}{5} \sin(5t) \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x_{l1} \\ x_{l2} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(5t) + \frac{6}{5} \sin(5t) \\ 5 \cos(5t) - \frac{31}{5} \sin(5t) \end{pmatrix} u_s(t)$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} y_{l1} \\ y_{l2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6 \cos(5t) - 5 \sin(5t)) e^{-t} \\ (29 \cos(5t) + \frac{174}{5} \sin(5t)) e^{-t} \end{pmatrix} u_s(t)$$

$$e) \begin{pmatrix} y_{f1} \\ y_{f2} \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 + (5 \sin(5t) - \cos(5t))e^{-t} \\ 29 - \frac{29}{5}(\sin(5t) + 5 \cos(5t))e^{-t} \end{pmatrix} u_s(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 + (155 \cos(5t) - 125 \sin(5t))e^{-t} \\ 29 + (725 \cos(5t) + 899 \sin(5t))e^{-t} \end{pmatrix} u_s(t)$$

6)

$$a) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0) u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0) u(t)$$

7) a)

$$2.c) \quad A_v = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2RC} & \frac{R}{L} + \frac{1}{2RC} \\ -\frac{1}{2RC} & -\frac{R}{L} + \frac{1}{2RC} \end{bmatrix} \quad B_v = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} \\ \frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad C_v = [1/2 \quad 1/2] \quad D_v=0$$

$$2.d) \quad A_v = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B_v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_v = [1/2 \quad 1/2] \quad D_v=0$$

b) Considerando $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ (una de las infinitas posibilidades), las matrices transformadas son:

$$A_v = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad B_v = \begin{bmatrix} 1/7 \\ -1/7 \end{bmatrix} \quad C_v = [1 \quad 1] \quad D_v=0$$

Ejercicio propuesto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad C = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0); \quad D=0$$

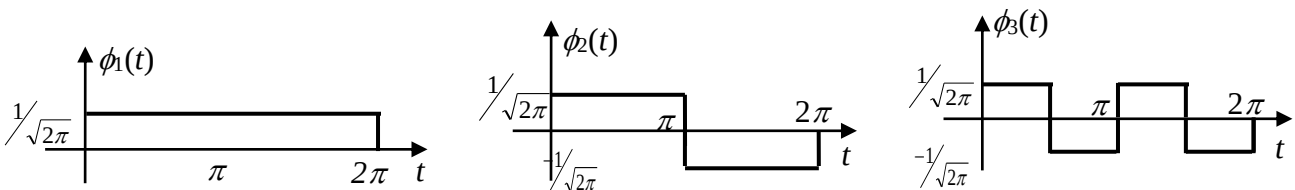
MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO PRÁCTICO N° 4

Serie y Transformada de Fourier

SERIE DE FOURIER

- 1) a) Demostrar que el conjunto $B = \left\{ 1, \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right\}$ es ortogonal en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.
 b) A partir de B, calcule B' ortonormal.
- 2) Considere el conjunto $B = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$, donde las funciones se describen en los gráficos. Muestre que B es un conjunto ortonormal para $0 < t < 2\pi$.



- 3) Demuestre, a partir de la expresión general dada por $C_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^2}$, que los coeficientes de la Serie de Fourier resultante cuando $\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$, $n \in \mathbb{Z}$, en $-T/2 < t < T/2$, se calculan como

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

- 4) Dada la siguiente función periódica:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases} \quad x(t) = x(t+2) \quad \forall t$$

- a) Dibuje al menos 3 períodos de $x(t)$ y calcule por definición los coeficientes de la serie exponencial de Fourier, c_n .
 b) Repita el cálculo propuesto en a) para la señal $v(t)$ dada por

$$v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases} \quad v(t) = v(t+2) \quad \forall t$$

- c) Observe que $v(t) = x(t-1/2)$. Demuestre que la relación entre los coeficientes de $x(t)$ y $v(t)$ está dada por:

$$c_n^v = c_n^x e^{-jt_0 n \omega_0} \text{ con } t_0 = 1/2.$$

- d) Encuentre para $v(t)$ la expresión de la serie trigonométrica calculando a_n y b_n por definición.

- 5) Dadas las siguientes series de Fourier

$$x(t) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2 + 1} \cos(10n\pi t) + \frac{9}{n} \sin(10n\pi t)$$

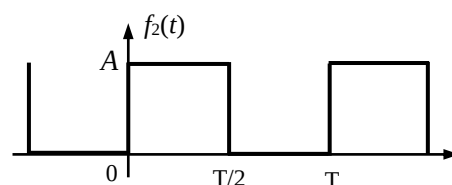
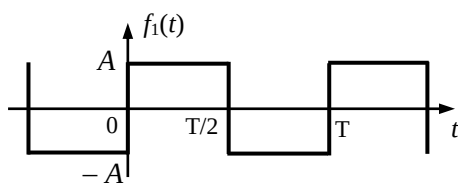
$$y(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{3}{n^2 + j3n} e^{jn2\pi t} \quad n \neq 0$$

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{jn\pi t}$$

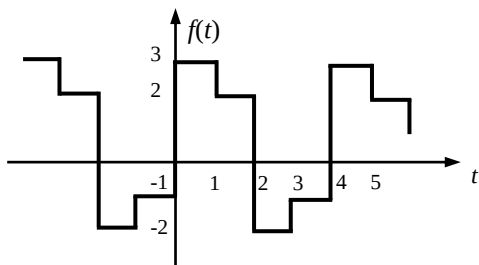
- Encuentre el valor medio, el período y la frecuencia fundamental.
- Determine la expresión de los coeficientes a_n , b_n y c_n .
- Halle la expresión temporal de la tercera armónica.
- Encuentre y grafique en dos gráficos separados la amplitud y la fase de los coeficientes de la serie exponencial hasta $n=5$.

6) Dada $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$, obtenga la expresión de $g(t) = \int_{t_0}^t f(\lambda) d\lambda$.

- Una vez obtenida $g(t)$, diga cuál es la condición que debe cumplir $f(t)$ para que $g(t)$ sea periódica.
- Obtenga gráficamente $g(t)$ para las señales mostradas a continuación integrando al menos un par de períodos. Tome $t_0=0$. Observe las formas de onda en ambos casos y vea si se cumple lo hallado en a)



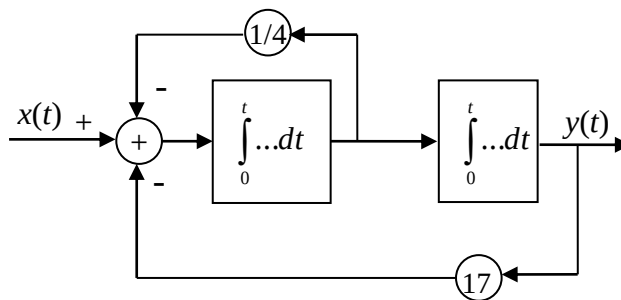
- 7) Si el desarrollo de Fourier de la señal mostrada es: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$, una suma de funciones continuas y en el gráfico se ven varias discontinuidades, entonces:



- ¿Qué valores tomará la serie de Fourier en esas discontinuidades? Analizar sólo para $0 \leq t < 4$
- ¿Cómo deberíamos definir la señal $f(t)$ para que la serie converja a $f(t)$ en todos los puntos?

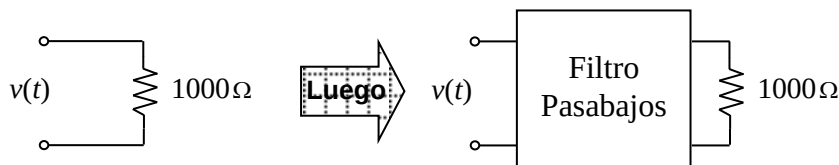
- 8) La señal periódica $x(t)$ ingresa al sistema mostrado abajo. Calcule la expresión de la cuarta armónica de la salida $y(t)$ en régimen permanente.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j}{n} e^{jnt} \quad n \neq 0$$



9) En un primer momento se aplica la señal $v(t)$ del ejercicio 4), a una resistencia de $1000\ \Omega$. Luego se intercala entre la señal $v(t)$ y la resistencia, un sistema lineal llamado filtro pasabajos que sólo deja pasar los armónicos de $v(t)$ de frecuencias menores a $2\ \text{Hz}$.

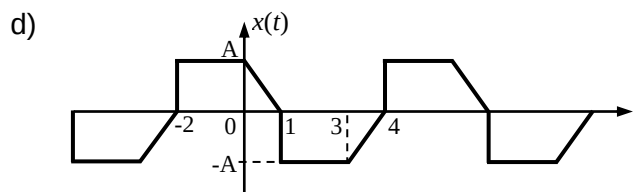
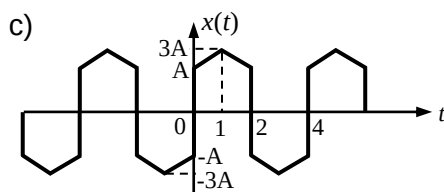
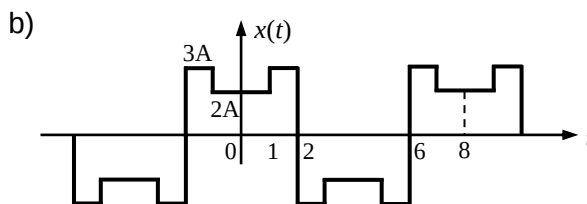
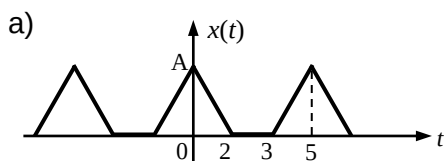
En ese sistema lineal $H(D = jn\omega_0) = \begin{cases} 1 & |n\omega_0| \leq 2\pi \cdot 2 \\ 0 & |n\omega_0| > 2\pi \cdot 2 \end{cases}$



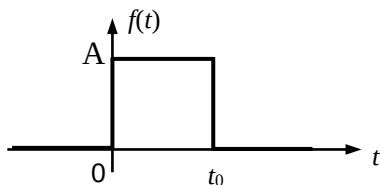
Encuentre la potencia disipada en la resistencia en el caso en que no está colocado el filtro y cuando sí está el filtro pasabajos.

Antes de hacer los cálculos: según el Teorema de Parseval, ¿cómo será la potencia en la resistencia con el filtro intercalado respecto de la potencia sin filtro?, ¿menor, mayor o igual?

10) Determine si las siguientes señales periódicas presentan simetrías par, impar y/o de media onda e indique (**sin resolver**) las expresiones de a_n y b_n para cada caso.



11) Obtenga una extensión periódica para el pulso que se muestra en la figura de modo de:

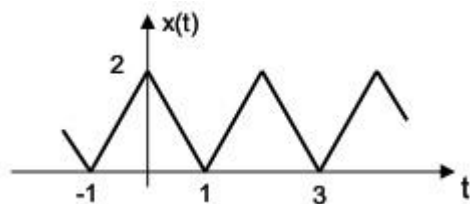


- Expresar a $f(t)$ como una combinación lineal de funciones seno de frecuencia fundamental $f_0 = 1/T = 1/2t_0$.
- Expresar a $f(t)$ como una combinación lineal de funciones coseno de frecuencia fundamental $f_0 = 1/T = 1/3t_0$.

Halle los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier en ambos casos.

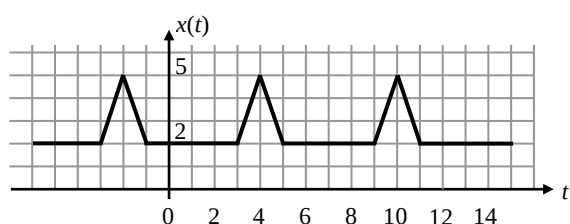
12) Reconsidere las funciones del ejercicio 4. Halle la amplitud y la fase de la tercera armónica y observe la relación de los valores encontrados con lo hallado en el inciso c) de dicho ejercicio.

13) Dada la señal mostrada en la siguiente figura:



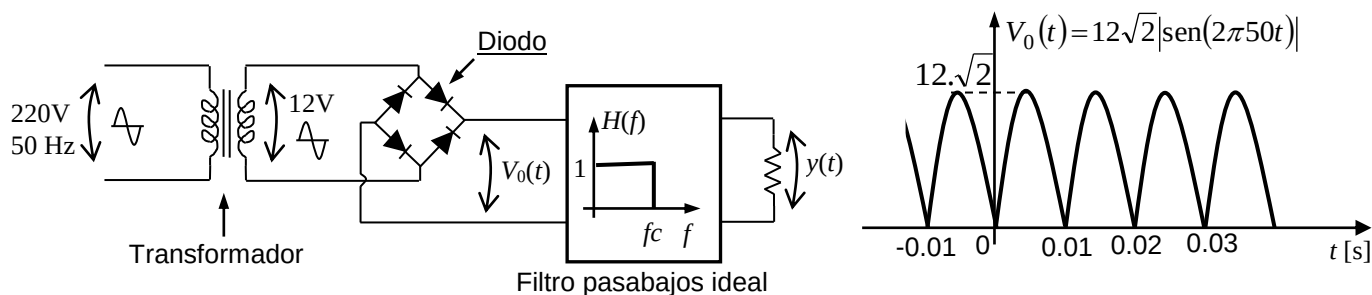
- Halle la serie trigonométrica de Fourier de $x(t)$.
- Encuentre la potencia media de $x(t)$.
- Halle la potencia media de la serie hasta el primer armónico inclusive.
- Calcule el error cuadrático medio que se comete al aproximar la función hasta el primer armónico inclusive.
- Calcule que porcentaje de potencia se pierde al aproximar $x(t)$ por su serie hasta el primer armónico.

14) Calcule la serie trigonométrica de Fourier de $x(t)$. Para ello, previamente, defina una señal $v(t)$ desplazando la señal $x(t)$ en el eje de las ordenadas y de las abscisas, de modo de facilitar el cálculo utilizando simetría. Luego:



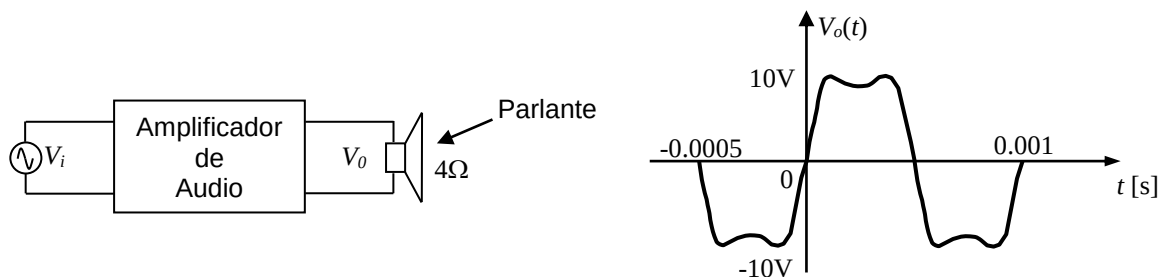
- Obtenga la representación en serie exponencial de ambas señales (use los coeficientes de la serie trigonométrica ya calculados).
- Obtenga las expresiones de los espectros discreto de amplitud y de fase. Grafíquelos y compárelos.
- ¿Cuál es la separación entre barras de los espectros del inciso b)?

15) El siguiente circuito representa a un transformador que convierte la tensión de corriente alterna de 220 V, provista por la red domiciliaria, a 12 V. Luego, un puente de diodos convierte la onda senoidal de 12V a la tensión $V_0(t)$ de salida indicada en el gráfico, y por último, la señal $V_0(t)$ pasa por un filtro pasabajos ideal cuya salida es $y(t)$. Este circuito se utiliza para convertir corriente alterna en corriente continua de modo de alimentar dispositivos que normalmente usan pilas, tales como radios, televisores, reproductores mp3, etc.



- Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la tensión $V_0(t)$.
- ¿Cuál es la frecuencia de la primera armónica de la tensión $V_0(t)$?
- Determine la frecuencia de corte del filtro pasabajos (f_c) de modo que a la salida sólo se obtenga la componente de corriente continua o armónica de frecuencia cero. ¿Qué valor tiene esa tensión de corriente continua?
- Si $f_c = 350$ Hz, obtenga la expresión temporal de la señal $y(t)$ [en régimen permanente].

16) Se ingresa a un amplificador de audio con una onda senoidal de 1 KHz y, debido a que el amplificador no es lineal, en lugar de obtener una onda senoidal pura en la salida (V_0) se obtiene la señal mostrada en la figura.



La señal $V_o(t)$ se puede representar mediante una serie de Fourier como la siguiente:

$$V_o(t) = 10 \sin(2\pi 1000 t) + 4 \sin(2\pi 3000 t) + 2 \sin(2\pi 5000 t) + \sin(2\pi 7000 t)$$

Se pide:

- Grafique el espectro de amplitud y el espectro de fase.
- Calcule la potencia media de $V_o(t)$ sobre el parlante de 4 Ohms.
- ¿Cuántos armónicos se necesitan para tener al menos el 90% de la potencia media de $V_o(t)$?
- Calcule el porcentaje de distorsión armónica del amplificador (THD) con la fórmula que se da a continuación:

$$THD = 100 \cdot \sqrt{\frac{|C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2 + \dots + |C_m|^2}{|C_1|^2}}$$

donde los c_i son los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de la señal $V_o(t)$.

Observe que si no hubiese distorsión: $|C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2 + \dots + |C_m|^2 = 0$

17) Complete la siguiente tabla, donde se dan los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier hasta la tercera componente armónica. Grafique los espectros discretos de amplitud y fase utilizando la información que surge de la tabla.

n	C_n (forma cartesiana)	C_n (forma polar)	$ c_n $	θ_n
0	0.7854			
1	-0.3183-j0.5			
-1	-0.3183+j0.5			
2	j0.25			
-2	-j0.25			
3	-0.0356-j0.1677			
-3	-0.0356+j0.1677			

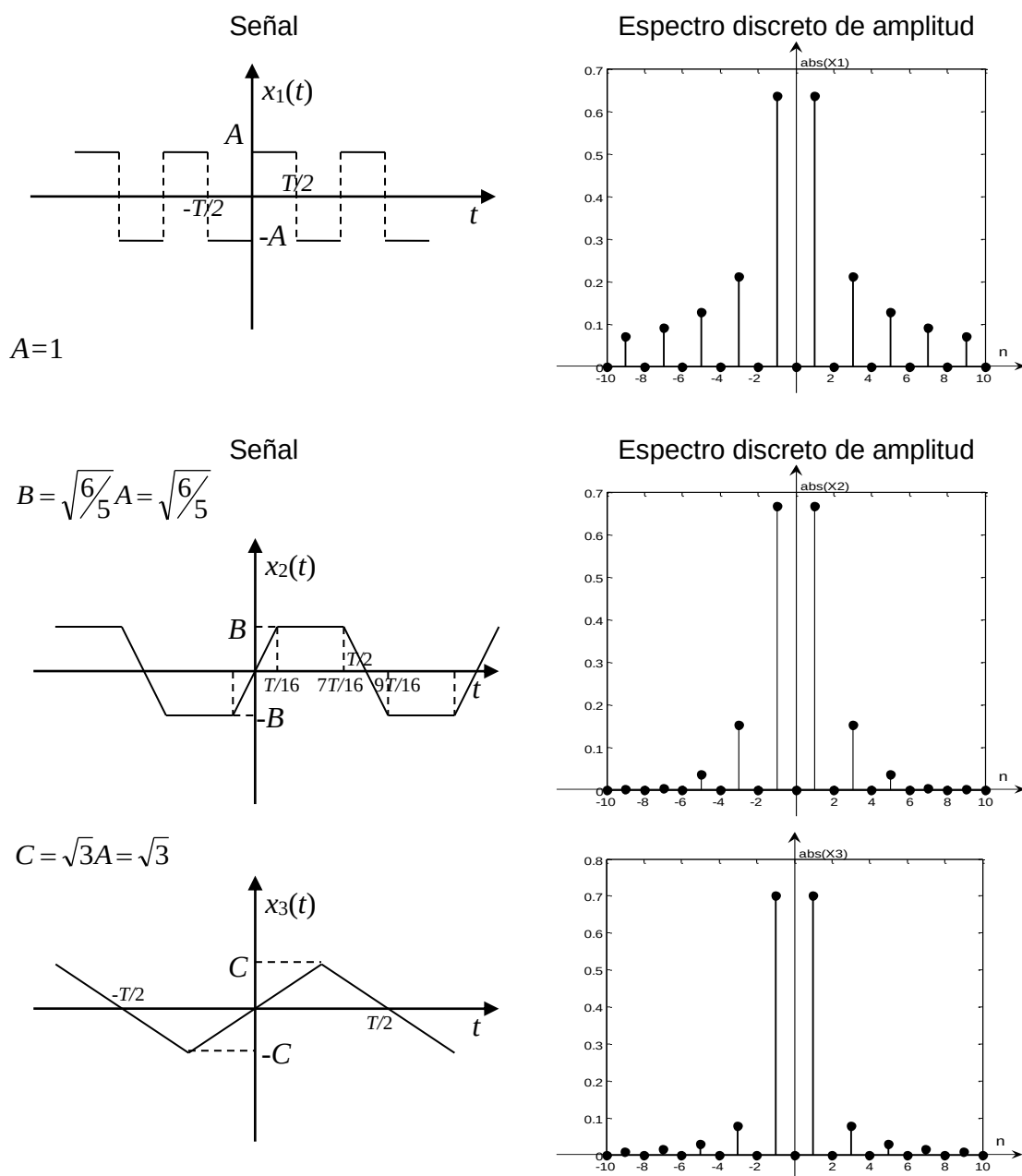
18) Dada una señal $x(t)$ periódica. Demuestre que el espectro de amplitud de $x(t - t_0)$ es el mismo que el de $x(t)$ y que el espectro de fase de $x(t - t_0)$ es $\theta(n\omega_0) - n\omega_0 t_0$.

[Comience con la expresión de la serie exponencial de $x(t)$ y además: $C_n = |C_n| e^{j\theta(n\omega_0)}$]

19) Dadas las tres señales periódicas siguientes, iguales en potencia media y de valor medio cero, y sus correspondientes espectros de amplitud discretos. Se pide:

Observe los espectros discretos de las tres señales y responda:

- ¿Cuál de los tres espectros tiene mayor contenido de alta frecuencia?
- Observe la derivada en el origen de las tres señales en el tiempo. ¿Cuál de las tres señales varía más rápidamente en el tiempo?
- ¿Qué conclusión saca de lo respondido en a) y b)?



TRANSFORMADA DE FOURIER

20) Encuentre por definición la transformada de Fourier de

a) Un pulso triangular: $x_a(t) = T_{2b}(t)$.

$$b) x_b(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{otros } t \end{cases}$$

21) Mediante la definición de transformada de Fourier demuestre lo siguiente:

- La transformada de Fourier de una señal par es una función real.
- La transformada de Fourier de una señal impar es una función imaginaria.

22) Dadas las siguientes $F(\omega)$, grafique los espectros de amplitud y de fase.

a) $F(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

b) $F(\omega) = \text{sinc}(\omega)$

c) $F(\omega) = \frac{j\omega}{a^2 + \omega^2}$

d) $F(\omega) = P_4(\omega - 2)e^{j3\omega}$

23) Dados los siguientes pares transformados obtenga los pares transformados duales usando la propiedad de dualidad.

a) $e^{-at}u_s(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a} \quad a > 0$

b) $P_a(t) \leftrightarrow a \text{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right)$

c) $e^{jat} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - a)$

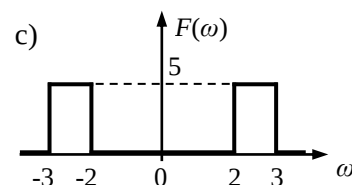
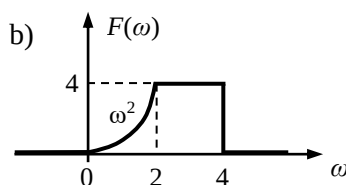
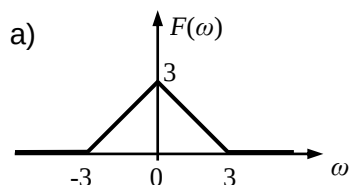
24) Encuentre $F(\omega)$ si $g(t) = e^{j\frac{\pi}{4}t} f(t)$ y los espectros de amplitud y fase de $g(t)$ son los siguientes:

$$|G(\omega)| = P_4(\omega) \quad \theta(\omega) = -\frac{4}{\pi}\omega + 1$$

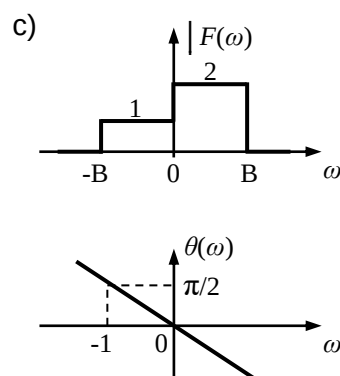
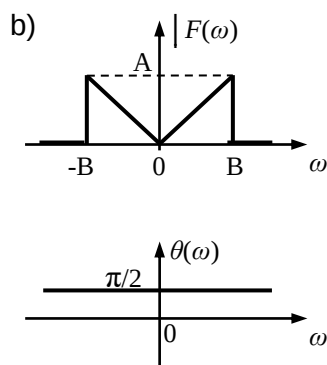
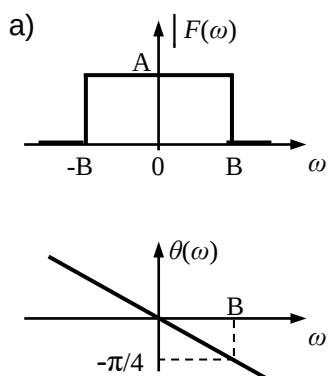
25) Halle el valor de la siguiente integral aplicando alguna propiedad adecuada de la tabla de Fourier.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} 4 \text{sinc}^2(x) dx$$

26) Mediante la propiedad de derivación en la frecuencia obtenga la $f(t)$ de las siguientes $F(\omega)$:



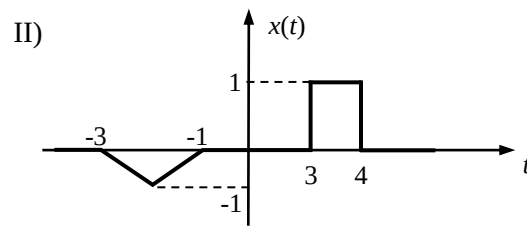
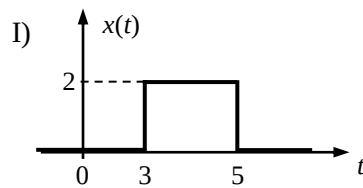
27) Obtenga la $f(t)$ correspondiente a los espectros de amplitud y fase dados.



¿Qué conclusión obtiene sobre $|F(\omega)|$ y $\theta(\omega)$ en cuanto a si son funciones pares o impares y la $f(t)$ que generan?

Sugerencia: arme la $F(\omega)$ como $F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$

28) Para las señales mostradas en la figura:



a) Halle $X(0)$.

b) Encuentre la transformada de Fourier de $g(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$ usando propiedades.

c) Halle $g(t)$ integrando gráficamente.

c) Según el valor de $X(0)$ hallado en a), ¿qué tipo de señales se generaron al calcular $g(t)$?
¿Qué tipo de $G(\omega)$ encontró?

29) Dadas las siguientes señales:

Señales de Energía:

Señales de Potencia:

Señales de Orden Superior:

a) $x(t) = P_2(t - 3)$

c) $x(t) = \sin^2(5t)u_s(t)$

e) $x(t) = 8t u_s(t)$

b) $x(t) = e^{-5|t|} \cos(10t)$

d) $x(t) = \text{sign}(t)$

f) $x(t) = (t - 1)^2$

Calcule la transformada de Fourier de cada señal [use tablas], grafique la señal $x(t)$ y su espectro de amplitud $|X(\omega)|$. ¿Qué tipo de señales generan siempre $X(\omega)$ continuas?

30) Sea $f(t)$ la señal definida como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ 20t & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

a) Grafique $f(t)$ y obtenga $F(\omega)$ (puede usar la propiedad de derivación en el dominio temporal).

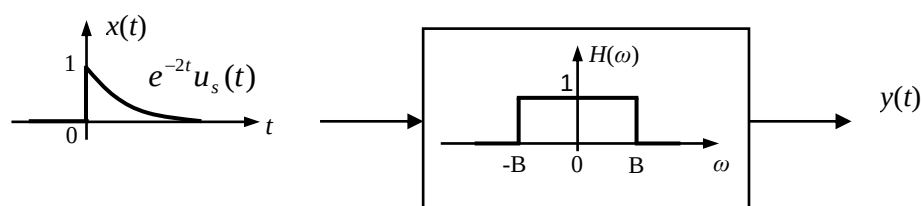
b) Si queremos expresar a $f(t)$ como $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$.

¿Qué valor tomará la integral para $t = -1$ y $t = 1$?

¿Cómo se deberá redefinir a $f(t)$ para que la integral converja a $f(t)$ en todos los puntos?

31) Un alumno calcula la transformada de Fourier de $u_s(t)$ usando la propiedad de derivación en el tiempo, sin embargo su resultado no coincide con el que muestra la tabla de transformadas. ¿Dónde está el error? Analice la relación entre la denominada propiedad de integración restringida y la propiedad de derivación en el tiempo.

32) Dado el siguiente sistema:

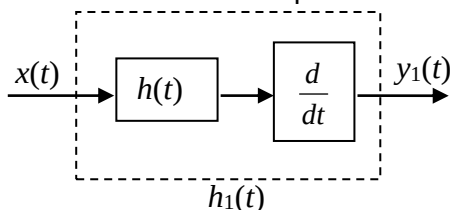


a) Obtener la densidad de energía $S_x(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{\pi}$ de la señal de entrada $x(t)$.

- b) Con la densidad de energía obtenida en el inciso anterior, calcule la energía de $x(t)$.
- c) Calcule la energía de $x(t)$ en el dominio del tiempo y verifique que da igual que en el inciso anterior.
- d) Halle y grafique el espectro de amplitud de la salida, $Y(\omega)$.
- e) Encuentre el valor de B del filtro pasabajos de modo que la energía de la señal $y(t)$ sea el 50% de la energía de la señal de entrada.

33) Un sistema lineal e invariante tiene una respuesta al impulso dada por $h(t) = e^{-t}u_s(t)$.

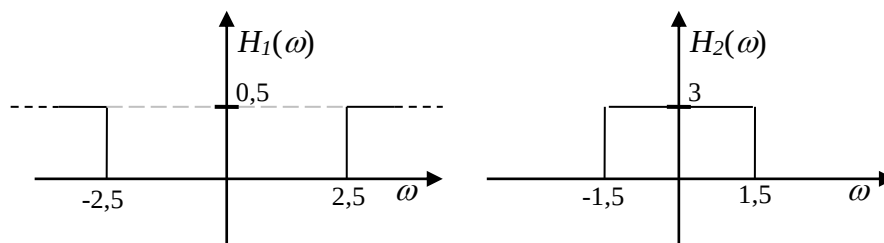
- a) Halle la respuesta en frecuencia del sistema, $H(\omega)$ y grafique los espectros continuos de amplitud y de fase de $h(t)$.
- b) Encuentre la transformada de Fourier de la salida, $Y(\omega)$, cuando la entrada es $x(t) = e^{-4t}u_s(t)$.
- c) Halle y grafique $y(t)$.
- d) El sistema anterior se conecta en serie con un bloque derivador como se muestra en la figura:



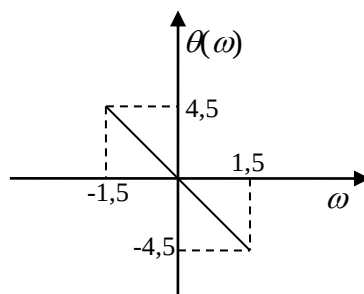
Halle $H_1(\omega)$ y grafique su amplitud y su fase. Encuentre la respuesta al impulso del nuevo sistema.

- e) Halle $Y_1(\omega)$ cuando la entrada del nuevo sistema es la misma que en el inciso b).
- f) Halle y grafique $y_1(t)$.

34) Una señal $x(t) = 3 + 10\sin(t) + 4\cos(2t) + \sin(3t)$ ingresa a dos sistemas cuyas respuestas en frecuencia, que son reales, se muestran en los siguientes gráficos:

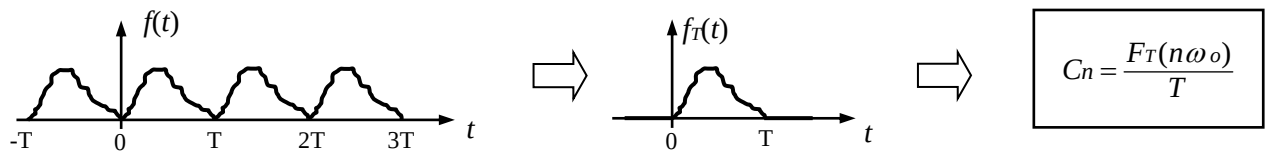


- a) Halle la transformada de Fourier de la entrada y grafique su espectro de amplitud.
- b) Halle las salidas de ambos sistemas en el dominio transformado y luego halle sus transformadas inversas. Grafíquelas en el dominio temporal.
- c) Halle y grafique la salida de un nuevo sistema, cuya respuesta en frecuencia es $H(\omega) = |H_2(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$, donde el espectro de fase, $\theta(\omega)$ es:



35) Una forma de hallar los coeficientes de la serie exponencial Fourier (c_n), es tomar la función $f_T(t)$ la cual repetida cada T segundos forma la señal periódica $f(t)$, hacerle la transformada de Fourier y calcular los c_n como se indica abajo.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_T(t - nT)$$



Halle los coeficientes de Fourier de las señales del ejercicio 12, por este método.

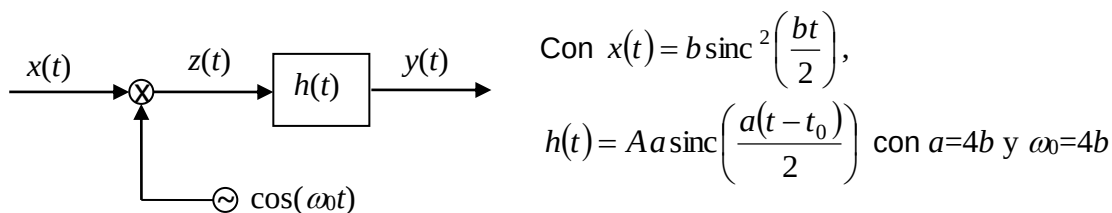
36) Demuestre que la siguiente identidad es verdadera para $f(t)$ y $g(t)$ funciones reales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G}(\omega)d\omega$$

37) Dada $f(t) = \text{sen}(\omega_0 t) P_a(t)$.

- Grafíquela.
- Obtenga $F(\omega)$ y grafique su espectro de amplitud para $\omega_0 \gg 2\pi/a$.
- ¿Qué sucede con el ancho del espectro cuando el ancho de la señal en el tiempo, a , aumenta?

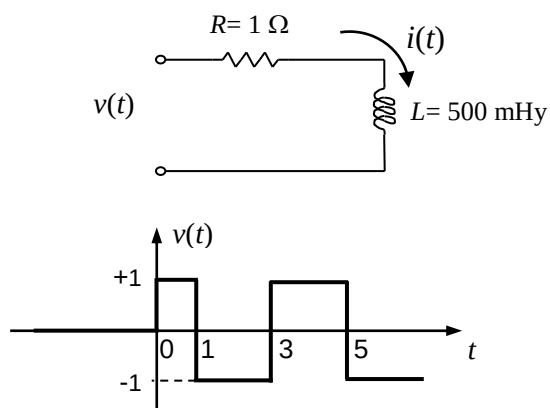
38) Dado el sistema representado por el siguiente diagrama en bloques:



- Hallar $Z(\omega)$ y $H(\omega)$ y graficar sus correspondientes espectros de amplitud y fase.
- Calcular la salida, $y(t)$.
- Calcular la salida, $y(t)$, si $a=10b$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Una tensión $v(t)$, periódica a partir de $t \geq 0$ se aplica al circuito RL mostrado. Se pide lo siguiente:



- Obtenga la serie trigonométrica de $v(t)$ (Use simetrías y extiéndala de modo que $v(t)$ quede expresada en función de cosenos).
- Obtenga la $i(t)$ resolviendo la ecuación diferencial e identifique el régimen transitorio y permanente. La corriente antes de aplicar la $v(t)$ es $i(0)=0$.
- Calcule aproximadamente el valor eficaz de la $i(t)$ en régimen permanente utilizando sólo los tres primeros armónicos no nulos.

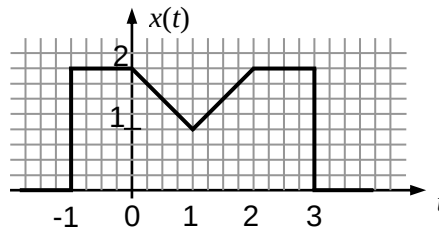
2) Grafique los espectros de amplitud y fase de las siguientes señales:

$$x(t) = 3 + \sin(t)$$

$$y(t) = 1 + 0,8\cos(2t) + 0,2\cos(4t)$$

Diga, justificando su respuesta, si las señales temporales son pares o impares.

3) Sea $x(t)$, la señal mostrada en la figura. Sin calcular la $X(\omega)$ y basándose en las definiciones de la transformada, antitransformada y propiedades, resuelva los siguientes ítems:



a) Encuentre $X(0)$

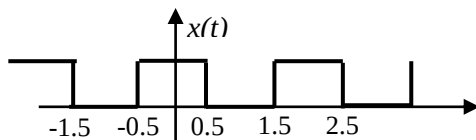
b) Encuentre $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$

c) Resuelva la siguiente integral $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \operatorname{sinc}(\omega) e^{j3\omega} d\omega$

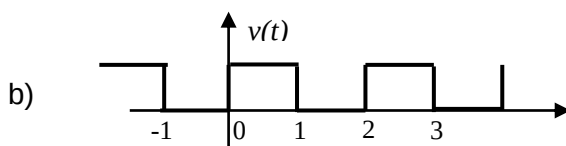
d) Halle el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

MATEMÁTICA AVANZADA TRABAJO PRÁCTICO N° 4 Respuesta a los Ejercicios

4) a)



$$c_n^x = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \forall n$$



$$c_n^v = -j \frac{(1 - \cos(n\pi))}{2n\pi} \quad n \neq 0$$

$$c_0^v = \frac{1}{2}$$

$$d) \quad v(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos(n\pi))}{n\pi} \sin(n\pi t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi t)$$

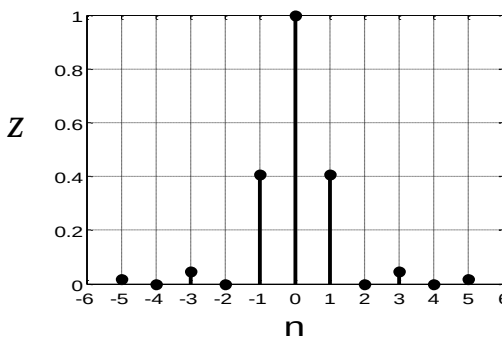
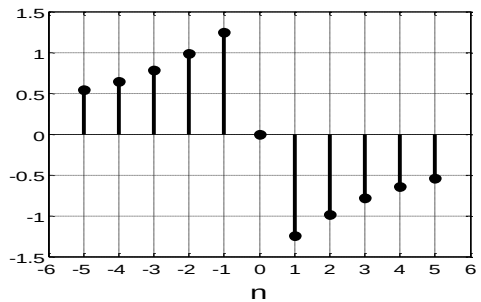
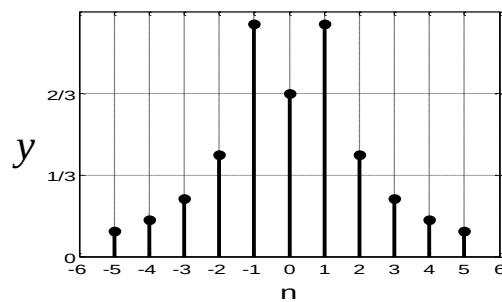
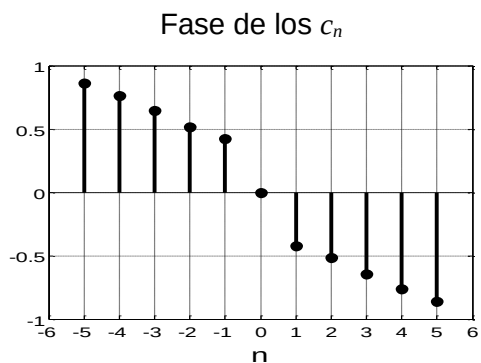
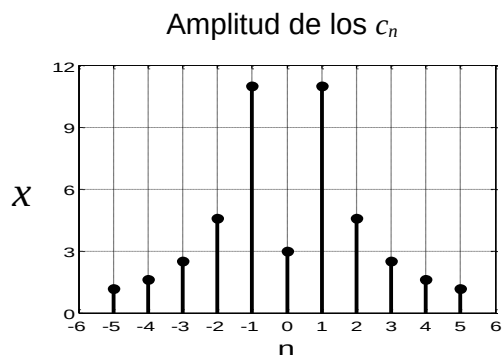
5)

$$x(t) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } V_m=3 \quad T=1/5 \quad \omega_0=10\pi \\ \text{b) } a_n=40/(n^2+1) \quad b_n=9/n \\ \quad \quad c_n=20/(n^2+1) - j9/2n \\ \text{c) } x_3(t)=4 \cos(30\pi t)+3 \sin(30\pi t)=5 \cos(30\pi t - 0.6435) \end{array} \right.$$

$$y(t) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } V_m=2/3 \quad T=1 \quad \omega_0=2\pi \\ \text{b) } a_n=6/(n^2+9) \quad b_n=18/(n^3+9n) \\ \quad c_n=3/(n^2+j3n) \\ \text{c) } x_3(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{e^{j6\pi t}}{1+j}+\frac{e^{-j6\pi t}}{1-j}\right)=\left(\sqrt{2}/3\right)\cos(6\pi t-\pi/4) \end{array} \right.$$

$$z(t) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } V_m=1 \quad T=2 \quad \omega_0=\pi \\ \text{b) } a_n=2 \operatorname{sinc}^2(n\pi/2) \quad b_n=0 \\ \quad c_n= \operatorname{sinc}^2(n\pi/2) \\ \text{c) } z_3(t)=0.0901 \cos(3\pi t) \end{array} \right.$$

d)



Vale cero para todo n.

$$6) \quad g(t) = \frac{a_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n\omega_0} \right) \cos(n\omega_0 t) + \left(\frac{a_n}{n\omega_0} \right) \sin(n\omega_0 t) + K(\text{constante})$$

7) a) $f(0)=1$ b) $f(1)=5/2$
 $f(2)=0$
 $f(3)=-3/2$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t=0 \\ 3 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 5/2 & \text{si } t=1 \\ 2 & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{si } t=2 \\ -2 & \text{si } 2 < t < 3 \\ -3/2 & \text{si } t=3 \\ -1 & \text{si } 3 < t < 4 \end{cases}$$

8) $y_4(t) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} (\cos(4t) - \sin(4t)) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \sin\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$

9) P_m (sin filtro) = 0,5 mW P_m (con filtro) = 0,475 mW $1 \text{ mW} = 10^{-3} \text{ W}$

10) a) Simetría Par $\frac{a_0}{2} = \frac{2}{5} A$ $b_n = 0$ $a_n = \frac{4}{5} \int_0^2 \left(-\frac{A}{2}t + A\right) \cos\left(n\frac{2}{5}\pi t\right) dt$

b) Simetría Par, de media onda $\rightarrow$ cuarto de onda par

$$\frac{a_0}{2} = 0 \quad b_n = 0 \quad a_n = 2A \int_0^1 \cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right) dt + 3A \int_1^2 \cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right) dt \quad n \text{ impar}$$

c) Simetría Impar, de media onda $\rightarrow$ cuarto de onda impar

$$\frac{a_0}{2} = 0 \quad a_n = 0 \quad b_n = 2 \int_0^1 (2At + A) \sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right) dt \quad n \text{ impar}$$

d) Simetría de media onda

$$\frac{a_0}{2} = 0 \quad a_n = \frac{2}{3} \int_0^1 (-At + A) \cos\left(n\frac{\pi}{3}t\right) dt - \frac{2}{3} \int_1^3 A \cos\left(n\frac{\pi}{3}t\right) dt \quad n \text{ impar}$$

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^1 (-At + A) \sin\left(n\frac{\pi}{3}t\right) dt - \frac{2}{3} \int_1^3 A \sin\left(n\frac{\pi}{3}t\right) dt \quad n \text{ impar}$$

11) a) $f(t) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \sin\left(n\frac{\pi}{t_0}t\right) \right] P_{t_0}\left(t - \frac{t_0}{2}\right)$

b) $f(t) = \left[\frac{2}{3}A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}A \operatorname{sinc}\left(n\frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(n\frac{2\pi}{3t_0}t\right) \right] P_{t_0}\left(t - \frac{t_0}{2}\right)$

12) $A_3=5$ $\theta_3=-36,87^\circ$

$A_3=\sqrt{2}/3$ $\theta_3=-45^\circ$

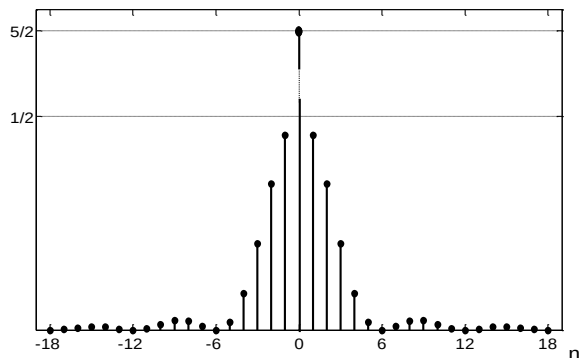
$A_3=0.0901$ $\theta_3=0^\circ$

13) a) $x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\pi t)$ b) $P_m=4/3$ c) $P_{m \text{ serie}}=1,3285$ d) $\varepsilon_m=0.0048$ e) $\%P=0,3625\%$

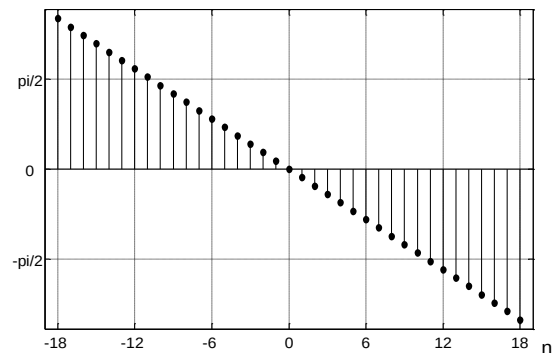
14) a) $x(t) = \frac{5}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(n\frac{\pi}{6}\right) e^{-jn\frac{4\pi}{3}} \right] e^{jn\frac{\pi}{3}t}, n \neq 0$ ó $x(t) = \frac{5}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(n\frac{\pi}{6}\right) e^{jn\frac{2\pi}{3}} \right] e^{jn\frac{\pi}{3}t}, n \neq 0$

b)

Espectro de amplitud



Espectro de fase



El gráfico del espectro de fase mostrado corresponde a la primera de las dos respuestas de la fase en b)

c) La separación entre barras es ω_0 cuando el eje de abscisas es $n\omega_0$.

15) a) $V_0(t) = 12V \left[\frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \sqrt{2} \frac{1}{1-4n^2} \cos(n 2\pi 100t) \right]$

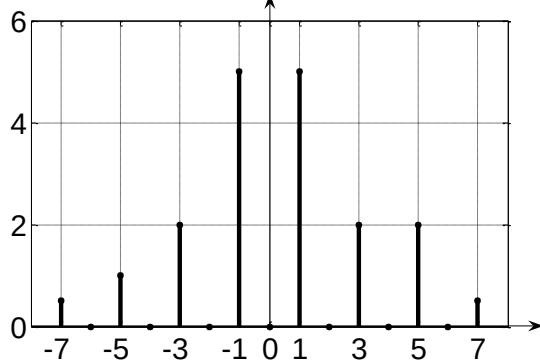
b) $f_0 = 100 \text{ Hz}$

c) $f_c < 100 \text{ Hz}$, $V_{cc} = 10.80 \text{ V}$

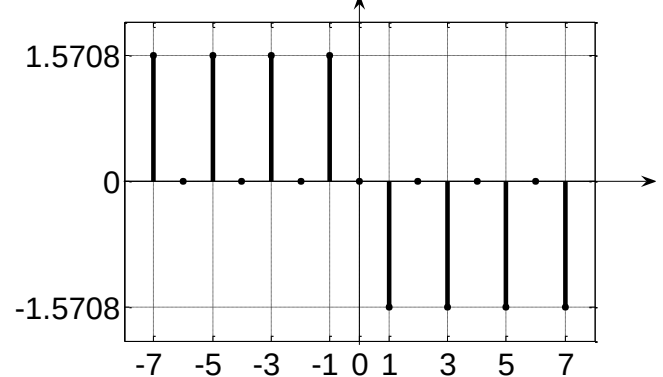
d) $y(t) = 10,80 - 7,20 \cos(2\pi 100t) - 1,44 \cos(2\pi 200t) - 0,62 \cos(2\pi 300t)$

16)

Espectro de amplitud



Espectro de fase

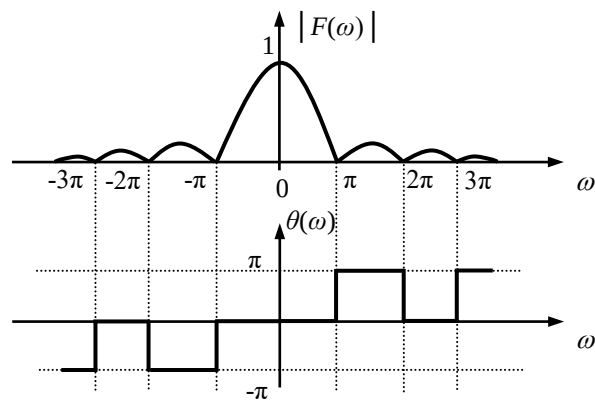
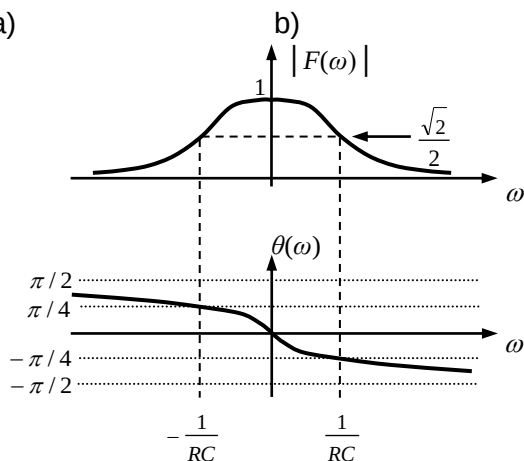


b) $P_m = 15,125 \text{ W}$ c) Se necesitan las primeras dos armónicas. d) THD = 45,83 %

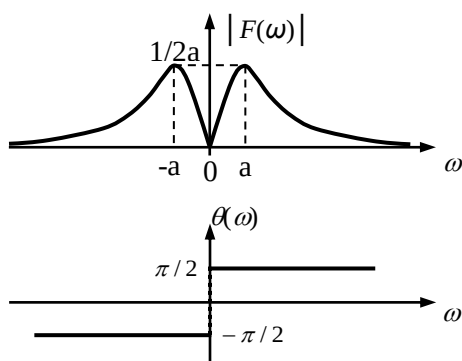
20) a) $X_a(\omega) = b \text{sinc}^2\left(\frac{b}{2}\omega\right)$

b) $X_b(\omega) = \frac{e^{-j\omega} - 1}{\omega^2} - \frac{e^{-j2\omega}}{j\omega}$

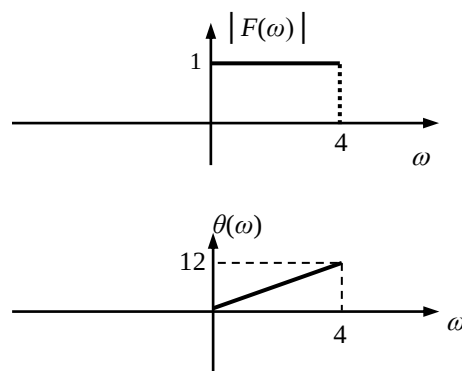
22) a)



c)



d)



23) a) $\frac{1}{jt+a} \leftrightarrow 2\pi e^{a\omega} u(-\omega)$

b) $a \operatorname{sinc}\left(\frac{at}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi P_a(\omega)$

c) $\delta(t-a) \leftrightarrow e^{-ja\omega}$

24) $F(\omega) = P_4\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) e^{-j\frac{4}{\pi}\omega}$

23) $I = 4\pi$

26) a) $f(t) = \frac{9}{2\pi} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{3}{2}t\right)$

b) $f(t) = \frac{2}{\pi t^2} (e^{j2t} - jt e^{j4t} - e^{jt} \operatorname{sinc}(t))$

c) $f(t) = \frac{5}{\pi} (3 \operatorname{sinc}(3t) - 2 \operatorname{sinc}(2t))$

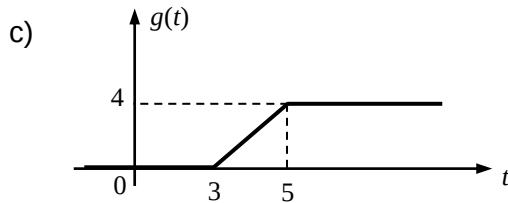
27) a) $f(t) = \frac{AB}{\pi} \operatorname{sinc}\left(B\left(t - \frac{\pi}{4B}\right)\right)$

b) $f(t) = j \frac{AB}{\pi} \left(\operatorname{sinc}(Bt) - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(B\frac{t}{2}\right) \right)$

c) $f(t) = \frac{B}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{B(t - \pi/2)}{2}\right) \left(e^{-j\frac{B}{2}(t - \pi/2)} + 2 e^{j\frac{B}{2}(t - \pi/2)} \right)$

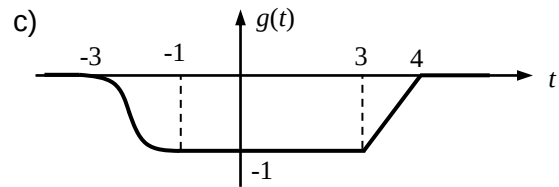
28) I) a) $X(0) = 4$

b) $G(\omega) = \begin{cases} \frac{4}{j\omega} e^{-j4\omega} \text{sinc}(\omega) & \omega \neq 0 \\ 4\pi\delta(\omega) & \omega = 0 \end{cases}$



II) a) $X(0) = 0$

b) $G(\omega) = \begin{cases} -\frac{e^{j2\omega}}{j\omega} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{e^{-j\frac{7}{2}\omega}}{j\omega} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) & \omega \neq 0 \\ -\frac{11}{2} & \omega = 0 \end{cases}$



29) a) $X(\omega) = 2e^{-j3\omega} \text{sinc}(\omega)$

b) $X(\omega) = \frac{1250 + 10\omega^2}{(125 - \omega^2)^2 + 100\omega^2} = \frac{1250 + 10\omega^2}{(\omega^2 - 75)^2 + 100^2}$

c) $X(\omega) = \frac{50}{j\omega(100 - \omega^2)} + \frac{\pi}{2} \left(\delta(\omega) - \frac{1}{2}\delta(\omega - 10) - \frac{1}{2}\delta(\omega + 10) \right)$

d) $X(\omega) = \frac{2}{j\omega}$

e) $X(\omega) = 8 \left(j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \right)$

f) $X(\omega) = -2\pi e^{-j\omega} \delta''(\omega)$

30) a) $F(\omega) = 40 \frac{\text{sinc}(\omega) - \cos(\omega)}{j\omega}$ b) $f(1) = 10$ $f(-1) = -10$, $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ -10 & \text{si } t = -1 \\ 20t & \text{si } -1 < t < 1 \\ 10 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

32) a) $S_x(\omega) = \frac{1}{\pi(4 + \omega^2)}$

b) $E_x = \frac{1}{4}$

d) $B = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

33) a) $H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$

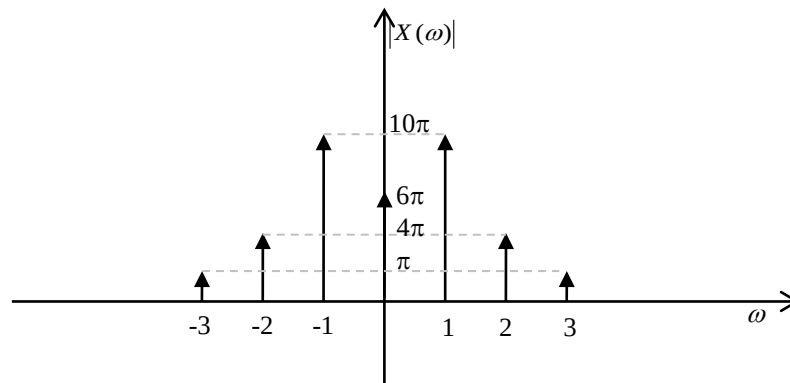
b) $Y(\omega) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{4 + j\omega} \right)$

c) $y(t) = \frac{1}{3} (e^{-t} - e^{-4t}) u_s(t)$

d) $H_1(\omega) = \frac{j\omega}{1 + j\omega}$; $h_1(t) = \delta(t) - e^{-t} u_s(t)$ e) $Y_1(\omega) = \frac{1}{4 + j\omega} \left(1 - \frac{1}{1 + j\omega} \right)$

f) $y_1(t) = \frac{1}{3} (4e^{-4t} - e^{-t}) u_s(t)$

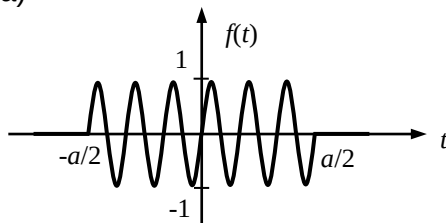
34) a) $X(\omega) = 2\pi \left(3\delta(\omega) - j5(\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)) + 2(\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)) - j\frac{1}{2}(\delta(\omega-3) - \delta(\omega+3)) \right)$



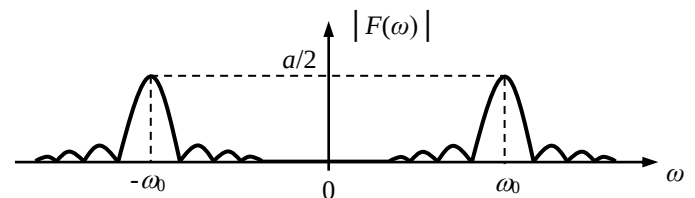
b) $y_1(t) = \frac{1}{2} \sin(3t)$; $y_2(t) = 9 + 30 \sin(t)$

c) $y_3(t) = 9 + 30 \sin(t-3)$

37) a)



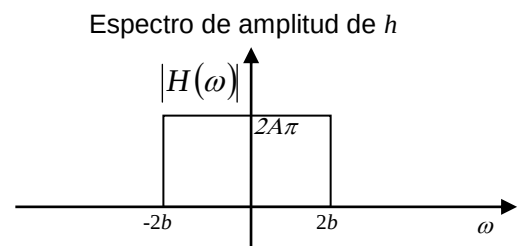
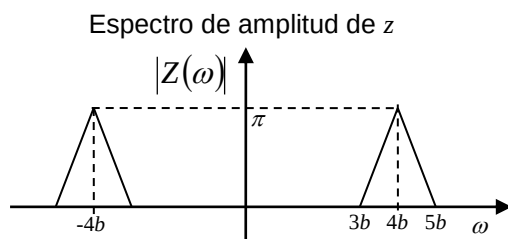
b)



$$F(\omega) = j \frac{a}{2} \left(\text{sinc} \left(\frac{a}{2} (\omega + \omega_0) \right) - \text{sinc} \left(\frac{a}{2} (\omega - \omega_0) \right) \right)$$

38) $Z(\omega) = \pi [T_{2b}(\omega - 4b) + T_{2b}(\omega + 4b)]$

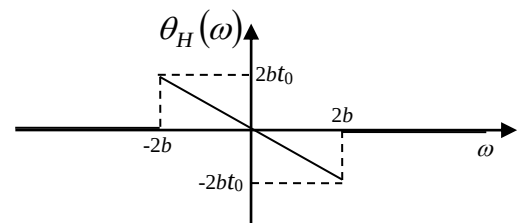
$$H(\omega) = 2A\pi P_{4b}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$



Espectro de fase de z

$$\theta_Z(\omega) = 0 \quad \forall \omega$$

Espectro de fase de h



b) $y(t) = 0$

c) $y(t) = 2A\pi b \text{sinc}^2 \left(\frac{b(t-t_0)}{2} \right) \cos(4b(t-t_0)) = 2A\pi z(t-t_0)$

Ejercicios propuestos

1) a)
$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \operatorname{sinc}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}t\right) u(t)$$

b)

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-R}{R^2 + (n\omega_0 L)^2} a_n e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{a_n}{\sqrt{R^2 + (n\omega_0 L)^2}} \cos\left(n\omega_0 t - \arctg\left(\frac{n\omega_0 L}{R}\right)\right) \quad \text{para } t \geq 0$$
$$a_n = 2 \operatorname{sinc}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

c) $I_{ef} \cong 0.719 \text{ A}$

- 3) a) 7
b) 4π
c) 2π
d) $\frac{76}{3}\pi$

MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Transformada de Laplace y Variable de Estado en el dominio de la frecuencia

1) Dadas las siguientes transformadas, provenientes de funciones $f(t)$ causales, determine y grafique en el plano “s” su región de convergencia analizando los polos y los ceros.

a) $F(s) = \frac{4}{s^2 - 4}$

b) $F(s) = \frac{1}{1 - e^{-st}}$

c) $F(s) = \frac{(s-3)s}{(s+1)(s^2-9)}$

2) Dadas $x_1(t) = e^{-3t}u_s(t)$ y $x_2(t) = e^{-t}u_s(t)$, mostrar que x_1 y x_2 son funciones de orden exponencial y hallar la Transformada de Laplace de $x(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t)$. Determinar su región de convergencia.

3) Calcule el valor de las siguientes integrales a partir de la definición de la transformada de Laplace.

a) $I = \int_0^\infty \text{sinc}(\omega_0 t) dt$

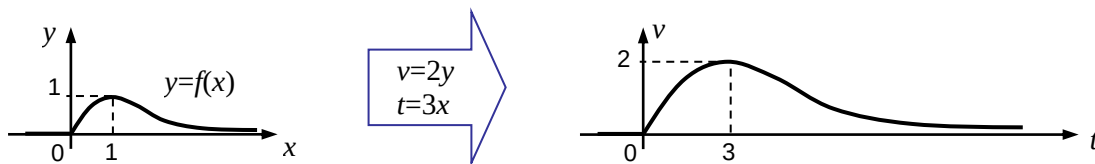
b) $I = \int_{-\infty}^\infty t^2 e^{-|3t|} dt$

4) Aplique la **propiedad de escala** para obtener las transformadas de Laplace de las siguientes señales:

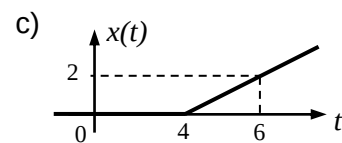
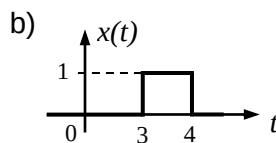
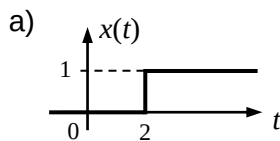
a) $f(t) = (3t)^2 + 2(3t) + 10$

b) Se modifica la escala del dibujo de la función $y(x)$ de modo de ampliarlo en el eje x y en el eje y.

La transformada de $f(x)$ es $F(s) = \frac{k}{(s-1)^2}$. Halle $V(s)$.



5) Aplique la **propiedad de traslación en el tiempo** para transformar las siguientes señales:



6) Demuestre las siguientes proposiciones:

a) Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{G(s)}{s}$ entonces $\mathcal{L}\{r^t f(at)\} = \frac{1}{s - \ln(r)} G\left(\frac{s - \ln(r)}{a}\right) \quad a > 0$

Ayuda: $r^t = e^{\ln(r^t)} = e^{t \ln(r)}$

b) Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces $\mathcal{L}\left\{\int_0^t dx \int_0^x f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s^2}$

Ayuda: use la propiedad de transformada de Laplace de la integral de una función.

7) Halle las transformadas de las siguientes funciones:

a) $x(t) = e^{-2t} \text{sen}(t) u_s(t)$

b) $x(t) = t^2 e^{4t} u_s(t)$

8) Haga la derivada primera de las señales del ejercicio 5) y, aplicando la propiedad correspondiente, encuentre la transformada de Laplace en cada caso.

9) Calcule las transformadas de las siguientes funciones, usando la propiedad: $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du$

a) $f(t) = \frac{\text{sen}(at)}{t} u_s(t)$

b) $f(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{t} u_s(t)$

c) $f(t) = \frac{\text{sh}(3t)}{t} u_s(t)$

10) Halle las transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(t) = \int_0^t (u^3 + 5u^2 + 3u + 2)du$

b) $f(t) = \int_0^t \frac{\text{sen}(u)}{u} du$

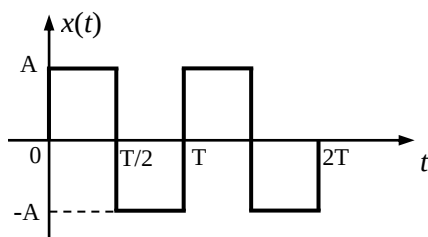
11) Usando la propiedad: $t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(s)$ calcule las transformadas de las siguientes señales:

a) $f(t) = t \text{sen}(6t) u_s(t)$

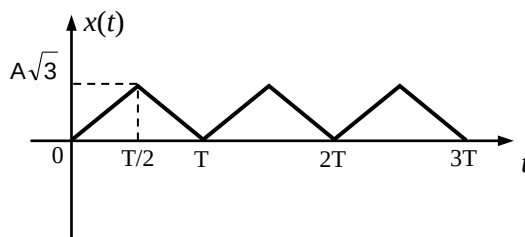
b) $f(t) = t^2 \text{ch}(3t) u_s(t)$

12) Halle las transformadas de Laplace de las siguientes señales periódicas.

a)



b)



Transformada inversa de Laplace

13) Use el método de desarrollar la $F(s)$ en fracciones parciales para obtener $f(t)$.

a) $F(s) = \frac{e^{-4s}}{(s+2)(s+3)}$

b) $F(s) = \frac{s^2 + 4}{(s+1)(s^2 + 2s + 5)}$

c) $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$

14) Use la fórmula de inversión compleja para obtener $f(t)$ de $F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$.

$$\left[\text{Fórmula de Inversión Compleja: } f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(s)e^{st}] \quad n = \text{número de polos de } F(s)e^{st} \right]$$

Analice el corrimiento introducido en 13) a) por el factor e^{-4s} .

15) Use la fórmula de inversión compleja para encontrar la $f(t)$ correspondiente al caso presentado en 13) c).

16) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando transformada de Laplace a ambos miembros y distinga la solución libre de la solución forzada.

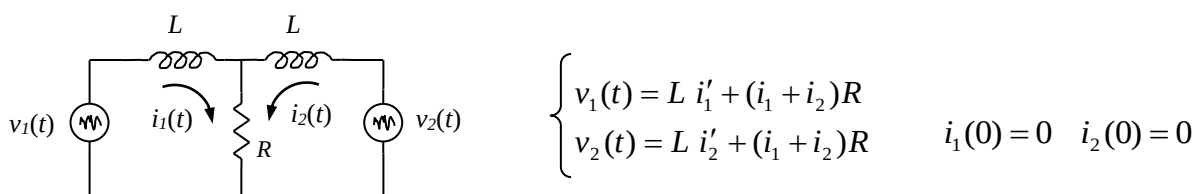
a) $y''(t) + 4y(t) = 10e^{-t}$

$y(0) = y'(0) = 0$

- b) $y''(t) - y(t) = 9t$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$
 c) $y^{IV}(t) - y(t) = 0$ $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1$
 d) $y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 2$ $y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$
 e) $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = \sin(t)$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

- Grafique en todos los casos las soluciones libre, forzada y total.
 - Compruebe que cumplen con las condiciones iniciales correspondientes en el dominio temporal y utilizando el teorema del valor inicial.

17) Dado el siguiente circuito, que se representa mediante el sistema de ecuaciones diferenciales mostrado, aplique la transformada de Laplace para encontrar la tensión en la resistencia R , $v_R(t)$, en función de las tensiones genéricas causales $v_1(t)$ y $v_2(t)$.



18) Resuelva la ecuación diferencial del ejercicio 28) de la Guía 2 de Sistemas Lineales aplicando transformada de Laplace.

19) Dada la siguiente ecuación diferencial

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = x(t),$$

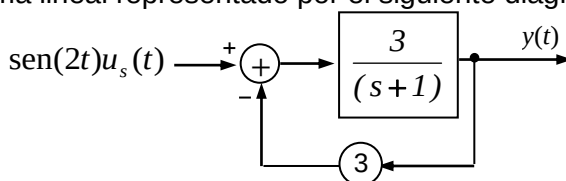
con:

- I) $a = 3 \quad b = 2$ II) $a = 4 \quad b = 8$ III) $a = -2 \quad b = 10$

- a) Halle la respuesta al impulso a partir de la $H(s)$ y ubique los polos en el plano s .
 b) Grafique $h(t)$.
 c) A partir del diagrama de polos y el gráfico de $h(t)$ analice si el sistema es estable o no.
 d) En los casos I y II halle la salida cuando la entrada es $x(t) = 2u_s(t)$ con condiciones iniciales nulas. Identifique la solución en régimen permanente.

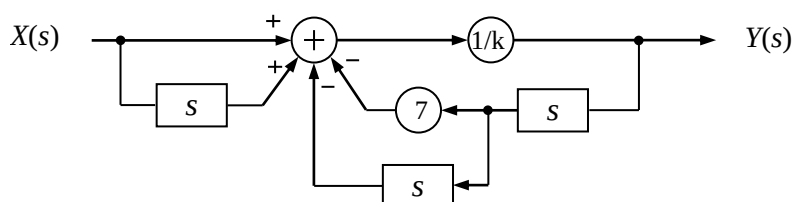
e) Aplique el teorema del valor final a la transformada de Laplace de la salida hallada en d). Observe la relación con la solución en régimen permanente hallada antes.

20) Dado un sistema lineal representado por el siguiente diagrama en bloques:



Halle $y(t)$ utilizando la Transformada de Laplace de las funciones involucradas.

21) Dado el siguiente sistema:

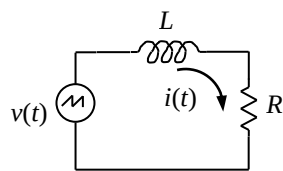


- a) Encuentre los valores de k para los cuales el sistema es estable.

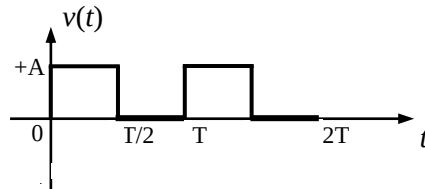
Luego, suponiendo que $k = 10$:

- Halle la respuesta al impulso.
- Obtenga la ecuación diferencial que modela al sistema.
- Calcule $y(t)$ cuando $x(t) = 2e^{-4t}u_s(t)$ sabiendo que $y(0) = 2$ $y'(0) = -4$. Distinga la solución libre de la solución forzada.
- Muestre que la solución forzada tiene valor inicial nulo (se calcula con condiciones iniciales nulas).

22) Para el circuito de la figura, con una entrada $v(t)$ periódica como la mostrada, se pide:

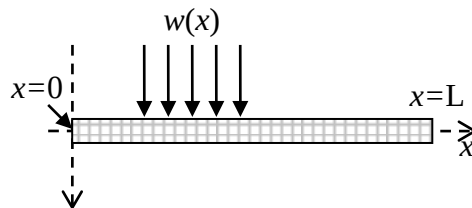


$$\begin{aligned} R &= 1 \, \Omega \\ L &= 10 \, \text{mHy} \\ i(0) &= 10 \, \text{mA} \\ A &= 2 \, \text{V} \\ T &= 10 \, \text{ms} \end{aligned}$$



- Obtenga la ecuación diferencial.
- Aplicando la Transformada de Laplace encuentre $i(t)$. Identifique la parte de la corriente que depende de la entrada y la que depende de las condiciones iniciales.

23) Suponga una barra cuyos extremos están ubicados en $x=0$ y $x=L$ coincidiendo con el eje x .



Si se aplica una carga vertical $w(x)$ por unidad de longitud que actúa transversalmente sobre la barra, entonces el eje de la barra sufre una deflexión $y(x)$ en el punto x que satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI} \quad 0 < x < L$$

Esta deflexión transversal suele llamarse curva de deflexión o curva elástica. La cantidad EI se llama rigidez flexural de la barra y la supondremos constante (E es el módulo elástico de Young de la barra e I es el momento de inercia de una sección transversal de la barra alrededor del eje). Las cantidades $EIY''(x)$ y $EIY'''(x)$ se llaman, respectivamente, momento de flexión y momento de corte en x . Observe que la eje y se toma positivo hacia abajo, es decir, que las deflexiones son positivas hacia abajo. Las condiciones de contorno asociadas con la ecuación diferencial dependen de la manera en que la barra es soportada. Las más comunes son las siguientes:

- Empotrada o fija: $y=y'=0$
- Simplemente apoyada: $y=y''=0$
- Libre: $y''=y'''=0$

a) Utilizando transformada de Laplace calcule la deflexión de una viga con sus extremos empotrados para $w(x)=\delta(x-L/2)$, $EI=1$, $L=1$.

El estado de la viga en los extremos está dado por las condiciones:

$$y(0)=y'(0)=y(L)=y'(L)=0.$$

b) Grafique la curva obtenida.

Ejercicio propuesto:

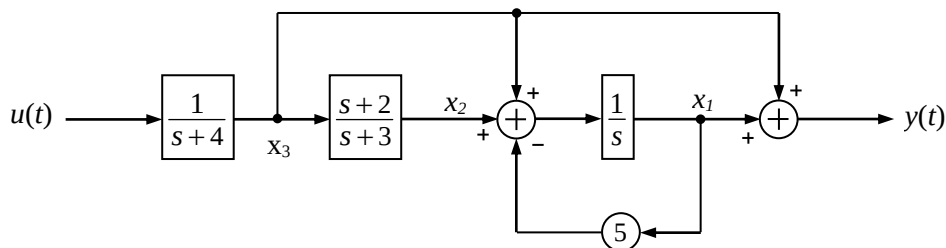
- a) Demuestre que si $f(t)$ es una señal que tiene transformada de Laplace $F(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = \frac{d^{(n)}F(s)}{ds^n}.$$

- b) Aplique la propiedad anterior para encontrar $\mathcal{L}\{t \cos(t) u_s(t)\}$

Variable de estado en el dominio de la frecuencia

24) Dado el sistema de la figura:



- Encuentre las matrices A, B, C y D del modelo de estado en el campo s .
- Halle la matriz de transición en el dominio transformado, $\phi(s)$.
- Utilizando la $\phi(s)$ obtenida calcule la función transferencia $H(s)$.
- Obtenga la ecuación diferencial que modela al sistema.
- ¿El sistema es estable? Justifique.
- Represente al sistema con las ecuaciones matriciales y el diagrama en bloques correspondientes a la segunda forma canónica.
- Calcule de nuevo el $H(s)$ con las ecuaciones de estado de la segunda forma canónica. Antes de realizar el cálculo: ¿a qué expresión se debería llegar para la $H(s)$?

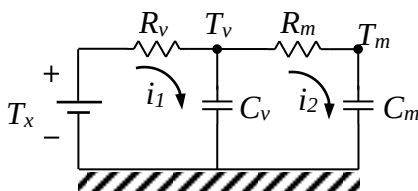
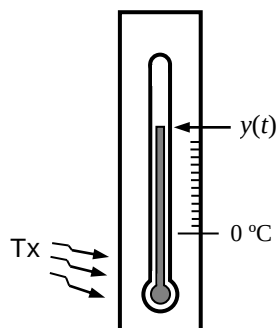
25) Considere el sistema descrito por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Encuentre la transformada de Laplace de la matriz de transición, $\phi(s)$.
- Halle la matriz de transición, $\phi(t) = e^{At}$.
- Encuentre la función de transferencia.
- A partir del modelo en variables de estado halle un diagrama en bloques utilizando bloques del tipo $1/s$.
- Si las condiciones iniciales del sistema son $y(0^-) = 1$ e $y'(0^-) = 1$ y no hay entrada aplicada, obtenga las correspondientes condiciones iniciales para las variables de estado, $x_1(0^-)$ y $x_2(0^-)$.
- Con las condiciones iniciales halladas en d) calcule la respuesta no forzada (libre) de los estados, $x(t)$. Grafique las respuestas y verifique las condiciones iniciales.
- Halle la respuesta no forzada (libre) del sistema, $y(t)$. Grafique la respuesta y verifique la condición inicial.
- Halle la respuesta total si la entrada es $u(t) = 10\sin(t) u_s(t)$ con las condiciones iniciales del inciso c). Utilice la respuesta calculada antes.
- Calcule los autovalores y los autovectores de la matriz de estados. A partir de lo calculado analice la estabilidad del sistema justificando su análisis.

- j) Proponga una matriz de transformación P tal que la matriz de estados del nuevo sistema sea diagonal.
- k) Halle la matriz de estados y la matriz de transición de los estados del nuevo modelo. ¿Cómo será su función de transferencia?

26) La siguiente analogía eléctrica modela el comportamiento de un termómetro de mercurio.



$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_p C_v} & \frac{1}{R_m C_v} \\ \frac{1}{R_m C_m} & -\frac{1}{R_m C_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_v C_v} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

T_x :	Temperatura a medir.
T_a :	Temperatura ambiente.
T_v :	Temperatura en el interior del vidrio del termómetro.
T_m :	Temperatura del mercurio.
C_v :	Capacidad térmica del vidrio.
C_m :	Capacidad térmica del mercurio.
R_v :	Resistencia térmica del vidrio.
R_m :	Resistencia térmica del mercurio.

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad R_p = \frac{R_m R_v}{R_m + R_v}$$

$$x_1 = T_v \quad x_2 = T_m \quad u(t) = T_x u_s(t)$$

$$R_v = 5 \frac{^\circ\text{C}}{\text{Watts}} \quad C_v = 1 \frac{\text{Joules}}{^\circ\text{C}} \quad R_m = 1 \frac{^\circ\text{C}}{\text{Watts}} \quad C_m = 10 \frac{\text{Joules}}{^\circ\text{C}} \quad k = 1 \frac{\text{mm}}{^\circ\text{C}}$$

Las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ representan flujos de calor, y las temperaturas están representadas por tensiones. La constante k relaciona el desplazamiento del mercurio por el tubo (en mm) con la temperatura de dicha sustancia.

El funcionamiento básico del sistema es el siguiente: La fuente de calor, a temperatura T_x , hace que el calor pase a través de la resistencia térmica del vidrio R_v . Parte de ese calor queda almacenado en la masa del vidrio, representada por la capacidad térmica C_v , y otra parte pasa a través de R_m y calienta la masa de mercurio, la cual aumenta su volumen en una pequeña cantidad. Pero gracias a que el tubo de vidrio es de diámetro muy pequeño (capilar) se consiguen desplazamientos comparativamente grandes en el tubo, proporcionales al aumento de temperatura del mercurio.

Se pide:

- Obtenga la transformada de Laplace de la matriz de transición de los estados, $\phi(s)$.
- Usando la $\phi(s)$ obtenida calcule la función transferencia $H(s)$.
- Si el termómetro se encuentra en equilibrio térmico a temperatura ambiente ($T_x = 20^\circ\text{C}$) (los capacitores C_v y C_m están "cargados" a $T = 20^\circ\text{C}$) y en $t=0$ se utiliza para controlar a una persona que tiene una temperatura de 40°C . ¿Cuánto tiempo tardará el termómetro en marcar el 99% de los 40°C ? Grafique $y(t)$ [$^\circ\text{C}$] utilizando Matlab y vea el resultado en el gráfico.
- Suponga que el termómetro ha estado sometido a 40°C el tiempo suficiente como para que la indicación $y(t)$ este estable (régimen permanente), y en un $t=0$ se pone el termómetro nuevamente a

temperatura ambiente. Calcule el tiempo que le lleva al termómetro marcar 21 °C. Haga el gráfico de $y(t)$ [°C] utilizando Matlab y vea el resultado en el gráfico.

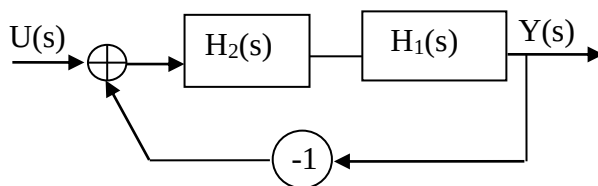
e) Encuentre la matriz de transformación Q tal que el modelo de estado represente a las variables de estado $(v_1, v_2) = (i_2, T_v)$.

f) Halle las ecuaciones de estado para las variables $(V_1(s), V_2(s))$ del inciso anterior.

g) ¿Cómo serán $H(s)$ y $\phi(s)$ en el modelo transformado con respecto a las del modelo original? No calcule, sólo responda.

27) Un sistema inestable, con función de transferencia $H_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ es parte de un nuevo sistema,

que incluye un filtro $H_2(s) = \frac{ks+10}{(s+6)}$ y una realimentación como muestra la figura :



a) Encuentre la Función de Transferencia del sistema completo.

b) Verifique que el modelo en Variables de Estado conocido como de la segunda forma canónica es el siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -(k+6) & -7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [10 \quad k \quad 0]; \quad \mathbf{D} = 0$$

c) Se considera que el sistema completo tendría el funcionamiento deseado si sus autovalores fuesen $\lambda_1 = -5$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm j$. Encuentre el valor de k en el filtro para que esto ocurra.

d) Verifique que $[1 \quad -5 \quad 25]^T$ es un autovector que corresponde a $\lambda_1 = -5$.

e) Complete con lo encontrado en d) la matriz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \dots & j & -j \\ \dots & -1-j & -1+j \\ \dots & 2 & 2 \end{bmatrix}$, donde, en las 2 últimas

columnas aparecen los autovectores correspondientes a $\lambda_{2,3}$.

f) Si se transformara el sistema de la segunda forma canónica utilizando la matriz $\mathbf{P}$ del inciso e), se generarían nuevas variables de estado $\mathbf{v}$, tales que $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{v}$. Sin calcular $\mathbf{P}^{-1}$, encuentre $\mathbf{A}_v$ y la matriz transición de los estados $\phi_v(s)$ para los nuevos estados $\mathbf{v}$.

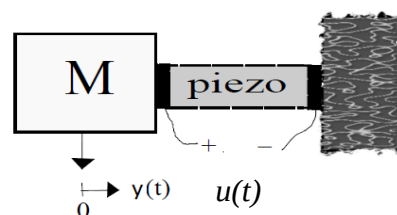
g) Encuentre la expresión, en el dominio transformado de la solución natural de los estados $\mathbf{V}(s)$, si $v_1(0) = v_2(0) = 1$, $v_3(0) = 0$. Encuentre también $\mathbf{v}(t)$.

h) Luego a partir de $\mathbf{v}(t)$, calcule $\mathbf{x}(t)$, y $y(t)$.

28) El esquema de la figura representa un dispositivo conformado por una masa M unida a un bloque de material piezoeléctrico (que se contrae levemente al aplicarle una tensión eléctrica) con electrodos metálicos sobre las caras opuestas, donde la posición $y(t)$ de dicha masa depende del voltaje $u(t)$. La ecuación diferencial que describe el sistema con sus parámetros es:

$$\alpha u(t) - r \frac{dy(t)}{dt} - \frac{1}{C} y(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2},$$

Donde α es la constante de proporcionalidad de la fuerza que ejerce el piezoeléctrico a la masa M ; r es la constante de resistencia mecánica; C es la capacidad mecánica del bloque piezoeléctrico.



Sabiendo que $\alpha=10$ N/V ; $r = 10$ kg/s; $C=1,9802 \times 10^{-3}$ s²/kg; $M=5$ kg, se pide:

- Encuentre la función de transferencia del SLIT que representa al dispositivo, $H(s)$.
- Encuentre, trabajando en el dominio transformado, la respuesta del sistema, $Y(s)$, si $u(t)=10 e^{-2t} u_s(t)$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Distinga entre respuesta libre y forzada.
- Encuentre la respuesta temporal del sistema, $y(t)$.
- Encuentre una representación del sistema en VE en el dominio de la variable de Laplace, 's'.
- Analice la estabilidad del sistema a partir de la matriz de estados, A .
- Halle la matriz de transición de los estados, $\phi(s)$, y a partir de ella calcule la función de transferencia del sistema.
- Proponga una matriz P para obtener un nuevo modelo en VE tal que la matriz de estados resulte diagonal. Escriba la matriz de estados resultante.

MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Respuesta a los Ejercicios

1) a) RC: $\sigma > 2$

b) RC: $\sigma > 0$

c) RC: $\sigma > -1$

2) $X(s) = \frac{-2(s+6)}{(s+3)(s+1)}$ RC: $\sigma > -1$

3) a) $I = \frac{\pi}{2\omega_0}$

b) $I = \frac{4}{27}$

4) a) $F(s) = \frac{10s^2 + 6s + 18}{s^3}$

b) $V(s) = 6 \frac{k}{(3s-1)^2}$

5) a) $X(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$

b) $X(s) = \frac{e^{-3s} - e^{-4s}}{s}$

c) $X(s) = \frac{e^{-4s}}{s^2}$

7) a) $X(s) = \frac{1}{((s+2)^2 + 1)}$

b) $X(s) = \frac{2}{(s-4)^3}$

9) a) $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{s}{a}\right) = \arctg\left(\frac{a}{s}\right)$

b) $F(s) = \text{Log}\left(\frac{s+2}{s}\right)$

c) $F(s) = \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{s+3}{s-3}\right)$

10) a) $F(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + 10s + 6}{s^5}$

b) $F(s) = \frac{1}{s} \arctg\left(\frac{1}{s}\right)$

11) a) $F(s) = \frac{12s}{(s^2 + 36)^2}$

b) $F(s) = \frac{2s(s^2 + 27)}{(s^2 - 9)^3}$

$$12) a) F(s) = \frac{A}{s} \frac{\left(1 - e^{-\frac{sT}{2}}\right)}{\left(1 + e^{-\frac{sT}{2}}\right)}$$

$$b) F(s) = \frac{2A\sqrt{3}}{T s^2} \frac{\left(1 - e^{-\frac{sT}{2}}\right)}{\left(1 + e^{-\frac{sT}{2}}\right)}$$

$$13) a) f(t) = (e^{-2(t-4)} - e^{-3(t-4)}) u_s(t-4)$$

$$b) f(t) = \frac{1}{4} e^{-t} [5 - \cos(2t) - 4\sin(2t)] u_s(t)$$

$$c) f(t) = [(2t-1)e^{-t} + e^{-2t}] u_s(t)$$

$$16) a) y(t) = [2e^{-t} - 2\cos(2t) + \sin(2t)] u_s(t)$$

$$b) y(t) = (-9t - 4e^{-t} + 4e^t) u_s(t)$$

$$c) y(t) = \frac{1}{2} [\text{sh}(t) - \text{sen}(t)] u_s(t) \quad d) y(t) = \frac{1}{13} (2 - 15e^{-2t} \cos(3t) - 10e^{-2t} \sin(3t)) u_s(t)$$

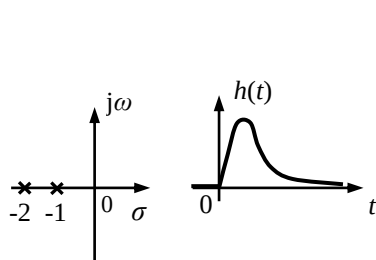
$$e) y(t) = \frac{1}{50} (4\sin(t) - 3\cos(t) + (3 + 55t)e^{-3t}) u_s(t)$$

$$17) v_R(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{2R}{L}t} \int_0^t [v_1(\lambda) + v_2(\lambda)] e^{\frac{2R}{L}\lambda} d\lambda$$

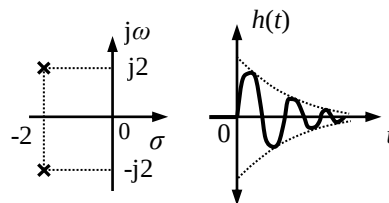
$$19) I) h(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u_s(t)$$

$$II) h(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(2t) u_s(t)$$

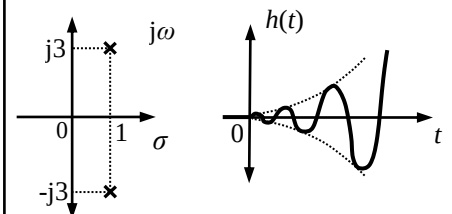
$$III) h(t) = \frac{1}{3} e^t \sin(3t) u_s(t)$$



ESTABLE



ESTABLE



INESTABLE

$$d) I) y(t) = \frac{1}{2} (1 + e^{-2t} - 2e^{-t}) u_s(t)$$

$$II) y(t) = \frac{1}{8} (1 - e^{-2t} \cos(2t) - e^{-2t} \sin(2t)) u_s(t)$$

$$20) y(t) = \frac{3}{104} [2e^{-10t} + 10\sin(2t) - 2\cos(2t)] u_s(t)$$

21) a) Para que el sistema sea estable debe ser: $k > 0$

$$b) h(t) = \frac{1}{3} (4e^{-5t} - e^{-2t}) u_s(t)$$

$$c) y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = x(t) + x'(t)$$

$$d) y(t) = \underbrace{(3e^{-4t} - 2e^{-5t} - e^{-2t})}_{\text{Solución forzada}} + \underbrace{2e^{-2t}}_{\text{Solución libre}} u_s(t)$$

$$22) a) L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = v(t)$$

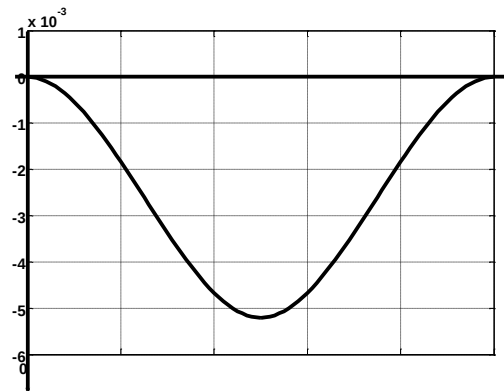
$$i(t) = i_0 e^{-R/Lt} u_s(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{R} \left[\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-nT)} \right) u_s(t-nT) - \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\frac{T}{2}-nT)} \right) u_s\left(t-\frac{T}{2}-nT\right) \right]$$

b)

$$i(t) = i_0 e^{-R/Lt} u_s(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{R} \left[(-1)^n u_s(t-nT/2) - (-1)^n e^{-\frac{R}{L}(t-nT/2)} u_s(t-nT/2) \right]$$

23)

b) Gráfico para $EI=1, L=1$.



a)

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{L}{16EI} x^2 - \frac{1}{12EI} x^3 & 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{(x-L/2)^3}{6EI} + \frac{L}{16EI} x^2 - \frac{1}{12EI} x^3 & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

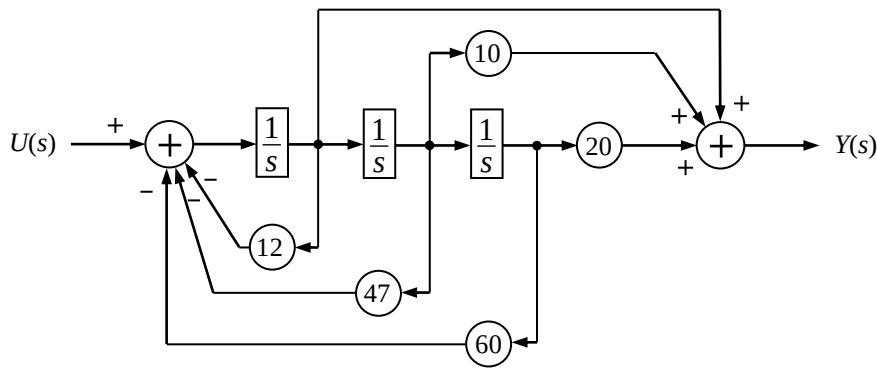
24)

$$a) A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0 \ 1) \quad D = 0$$

$$b) \phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+5} & \frac{1}{(s+5)(s+3)} & \frac{s+1}{(s+5)(s+3)(s+4)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} & \frac{-2}{(s+3)(s+4)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+4} \end{pmatrix} \quad c) H(s) = \frac{s^2 + 10s + 20}{(s+5)(s+3)(s+4)}$$

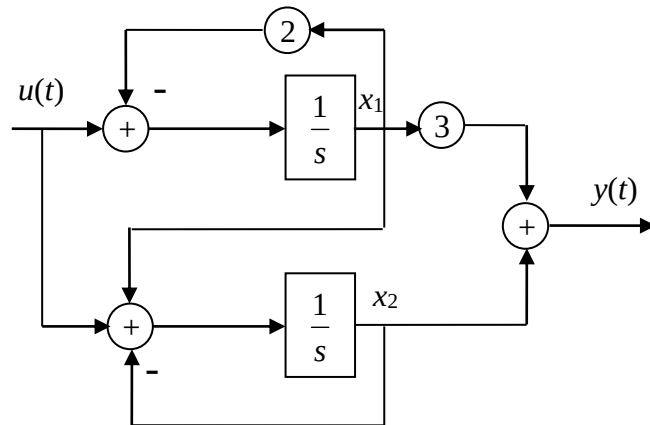
$$d) y'''(t) + 12y''(t) + 47y'(t) + 60y(t) = u''(t) + 10u'(t) + 20u(t) \quad e) \text{ Estable}$$

$$f) \begin{pmatrix} sV_1(s) \\ sV_2(s) \\ sV_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -60 & -47 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(s) \quad Y(s) = (20 \ 10 \ 1) \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{pmatrix}$$



25) a) $\phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$ b) $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ e^{-t} & -e^{-2t} & e^{-t} \end{pmatrix} u_s(t)$ c) $H(s) = \frac{4s+6}{s^2+3s+2}$

d)



e) $x_1(0) = -1; x_2(0) = 4$ f) $x_h(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ 3e^{-t} + e^{-2t} \end{pmatrix} u_s(t)$ g) $y_h(t) = (3e^{-t} - 2e^{-2t}) u_s(t)$

h) $y(t) = (13e^{-t} + 2e^{-2t} - 14\cos(t) + 18\sin(t)) u_s(t)$

i) Autovalores: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Autovectores: $\mathbf{v}_1 = k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = k \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

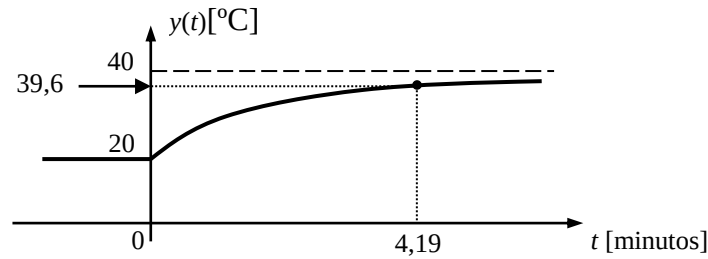
j) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, esta es una de las infinitas matrices que permiten hacer esta transformación.

k) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} u_s(t)$

26) a) $\phi(s) = \frac{1}{(s^2 + \frac{13}{10}s + \frac{1}{50})} \begin{pmatrix} s + \frac{1}{10} & 1 \\ \frac{1}{10} & s + \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ b) $H(s) = \frac{1}{50s^2 + 65s + 1}$

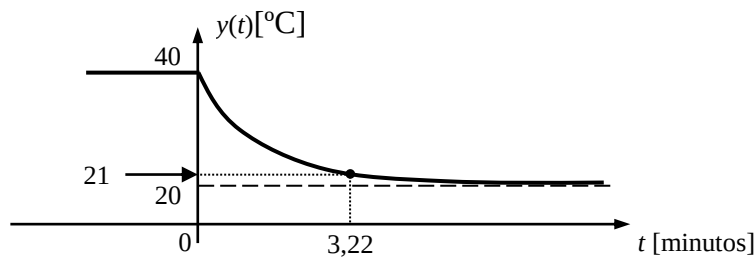
c) $t = 252$ segundos

$$y(t) = (40 + 0,2454e^{-1,2844t} - 20,2454e^{-0,0156t}) * u_s(t)$$



d) $t = 193$ segundos

$$y(t) = (20 - 0,2454e^{-1,2844t} + 20,2454e^{-0,0156t}) * u_s(t)$$



$$\text{e) } Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} sV_1(s) \\ sV_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} U(s) \quad Y(s) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{pmatrix}$$

$$\text{27) a) } H(s) = \frac{ks+10}{s^3+7s^2+(k+6)s+10}$$

c) $k=6$.

$$\text{e) } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & j & -j \\ -5 & -1-j & -1+j \\ 25 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{f) } \mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1+j & 0 \\ 0 & 0 & -1-j \end{bmatrix} \quad \Phi_v(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1-j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1+j} \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \mathbf{v}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} \\ \frac{1}{s+1-j} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ e^{-(t-j)} \\ 0 \end{bmatrix} u_s(t)$$

$$\text{h) } y(t) = [-20e^{-5t} + (4j-6)e^{-(t-j)}] u_s(t)$$

$$\text{28) a) } H(s) = \frac{2}{s^2+2s+101} = \frac{2}{(s+1)^2+100}$$

$$\text{b) } Y_f(s) = \frac{20/101}{s+2} - \frac{20/101(s+1)}{(s+1)^2 + 10^2} + \frac{20/101}{(s+1)^2 + 10^2}; \quad Y_l(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 10^2} + \frac{1}{(s+1)^2 + 10^2}$$

$$\text{c) } y(t) = \left(\frac{20}{101} e^{-2t} + \frac{81}{101} e^{-t} \cos(10t) + \frac{121}{1010} e^{-t} \sin(10t) \right) u_s(t) \quad \text{d) } sX(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -101 & -2 \end{pmatrix} X(s) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(s)$$

$$Y(s) = (2 \ 0) X(s)$$

$$\text{e) Sistema estable} \quad \text{f) } \Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+101} & \frac{1}{s^2+2s+101} \\ \frac{-101}{s^2+2s+101} & \frac{s}{s^2+2s+101} \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1(-1+10j) & k_2(-1-10j) \end{bmatrix}$$

Una de las infinitas posibles matrices de transformación, donde k_1 y k_2 pueden ser cualquier número.

*Prácticas
Demostrativas
con Matlab*

Práctica demostrativa N° 1

Funciones y series en variable compleja

Obtener el valor de las siguientes funciones en un punto dado, z_0 ,

- evaluando la función en el punto,
- calculando el valor de la serie de N términos.

$$f_1 = e^z$$
$$f_2 = \sin(z)$$

- Instrucciones para calcular el valor de la función en el punto:

```
>> clear all      % limpia el espacio de variables
>> z0=i*pi;      % ingresa el valor de z0=j*pi
>> f1=exp(z0)     % calcula f1 para el valor dado de z0
```

- A continuación aproximamos el valor de la función por la serie de Taylor:

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Una opción es hacer la suma acumulativa de N términos:

```
>> s1=1;         % Primer término de la serie
>> s1=s1+z0^1/factorial(1) % Suma de la serie hasta el segundo
término
>> s1=s1+z0^2/factorial(2) % Suma de la serie hasta el tercer término
>> s1=s1+z0^3/factorial(3) % Suma de la serie hasta el cuarto término
```

Compruebe que con el término décimo quinto se obtiene una buena aproximación de la función.

Otra forma de obtener la serie es calculando un único vector que contiene los valores de cada término de la serie, y finalmente hacer la suma:

```
>> N=15; % Cantidad de términos de la serie
>> n=[0:N] % Vector de índices de 0 a N
>> t1=z0.^n./factorial(n) % Calcula cada término de la serie
>> s1=sum(t1) % Calcula la sumatoria de los N términos
```

Una tercera opción es hacer un lazo, ya que algunas versiones de Matlab no admiten aplicar la función 'factorial' a vectores y matrices.

```
>> N=15; % Cantidad de términos de la serie
>> s1=1; % Se inicializa la suma
>> for k=1:N
>>     s1=s1+z0^k/factorial(k)
>> end
```

- Repita la operación para otros valores de z_0 .

- Repita todo el ejercicio para $f_2 = \sin(z)$.

Nota: La función seno en Matlab es 'sin'.

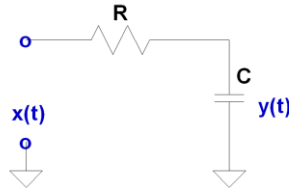
Recuerde que la serie que representa al seno es: $\sin(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Práctica demostrativa N° 2

Análisis de sistemas lineales en el dominio temporal

1) Respuesta de sistemas lineales de 1º y 2º orden

a) Consideremos el siguiente circuito RC:



$$R = 15,5 \text{ K}\Omega$$

representado por la ecuación diferencial $\tau y'(t) + y(t) = x(t)$, con $C = 470 \mu\text{F}$.

$$RC = \tau = 7,285 \text{ s}$$

Previamente se resolvió esta ecuación diferencial en la teoría con una entrada de amplitud 3 V y una condición inicial $y(0)=1\text{V}$. Si se considera que la entrada se aplica en $t=0$ la solución obtenida vale para $t > 0$, es decir:

$$y(t) = (3 - 2e^{-t/\tau})u_s(t)$$

Además, sabemos que podemos descomponer a esa solución de dos maneras diferentes:

$$\begin{array}{lcl} & y(t) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ y_h(t) = -2 \cdot e^{-t/\tau} u_s(t) & & y_l(t) = e^{-t/\tau} u_s(t) \\ + & & + \\ y_p(t) = 3u_s(t) & & y_f(t) = (3 - 3e^{-t/\tau})u_s(t) \end{array}$$

Grafique las funciones anteriores en $0 < t < 50 \text{ s}$. En un gráfico dibuje las soluciones homogénea, particular y total, y en el otro la libre, la forzada y la total.

```
>> t=linspace(0,50,1000);
```

Esta sentencia genera un vector con 1000 valores equiespaciados que van de 0 a 50.

Antes de escribir las funciones que vamos a graficar es necesario definir las constantes:

```
>> R=15.5e3;  
>> C=470e-6;  
>> tau=R*C;
```

Observe que Matlab es sensible a mayúsculas y minúsculas.

Ahora sí estamos en condiciones de escribir las funciones de salida.

```
>> yh=-2*exp(-t/tau);  
>> yp=3;  
>> yl=exp(-t/tau);  
>> yf=3-3*exp(-t/tau);
```

No es necesario multiplicar a las funciones por el escalón unitario ya que nuestro eje de tiempo está definido a partir del 0.

Por último graficamos las funciones.

```
>>plot(t,yh,'b',t,yp,'r',t,yh+yp,'k');  
>>axis([0,50,-3,4])  
>>figure  
>>plot(t,yl,'b',t,yf,'r',t,yl+yf,'k');  
>>axis([0,50,-3,4])
```

Esta instrucción permite graficar en una misma figura varias funciones en forma simultánea.

Las letras entre apóstrofes indican el código de colores de las líneas.

Observe los gráficos y complete:

- La solución en régimen permanente es igual aVolts, y es igual a la solución
- En el primer gráfico puede verse que la componente transitoria de la solución está dada por la solución
- La solución libre depende de
- La solución forzada depende de la..... y del....., con condiciones iniciales.....

b) Consideremos un sistema de segundo orden representado por la ecuación diferencial dada abajo.

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = x(t)$$

Las raíces de la ecuación característica dependen de los coeficientes, a y b , de la ecuación diferencial. En el caso en que $a=b=1$ dichas raíces son $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$, y por lo tanto la

solución homogénea tendrá la forma $y_h(t) = c_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

Se aplican al sistema dos entradas diferentes: en primer lugar una entrada senoidal de frecuencia angular $\omega=3$, $x(t)=\sin(3t)$ $u_s(t)$ ($y(0)= -0.25$ V; $y'(0)=0$ V), y en segundo lugar un pulso cuadrado de amplitud 1 V y duración 30 s, $x(t)=(u_s(t)-u_s(t-30))$ ($y(0)= -1$ V; $y'(0)=0$ V).

En el caso de la entrada senoidal ¿puede observarse una parte transitoria en la respuesta? ¿Cómo es el comportamiento del sistema en régimen permanente?.....

¿Qué puede decir del caso en que la señal de excitación es un pulso con respecto al régimen transitorio?

Para pensar:

¿Qué ocurre si la ecuación diferencial es $y''(t) - \frac{2}{25}y'(t) + \frac{626}{625}y(t) = x(t)$? Observe las raíces de la ecuación característica. ¿En qué cambia el comportamiento del sistema al tener estas raíces?

Este sistema es estable/inestable

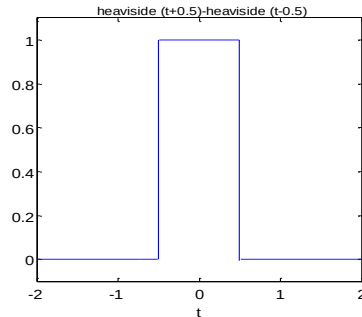
Observaciones:

- Los sistemas son ESTABLES si sus ecuaciones características tienen raíces con parte real!
- En los sistemas inestables no se puede hablar de respuesta en régimen permanente.

Práctica demostrativa N° 3

Convolución

a) Considere un pulso centrado en el origen, de duración $d=1$ y amplitud $A=1$, que representa tanto la señal de entrada $x(t)$ como la respuesta al impulso $h(t)$ como se ve en la siguiente figura.



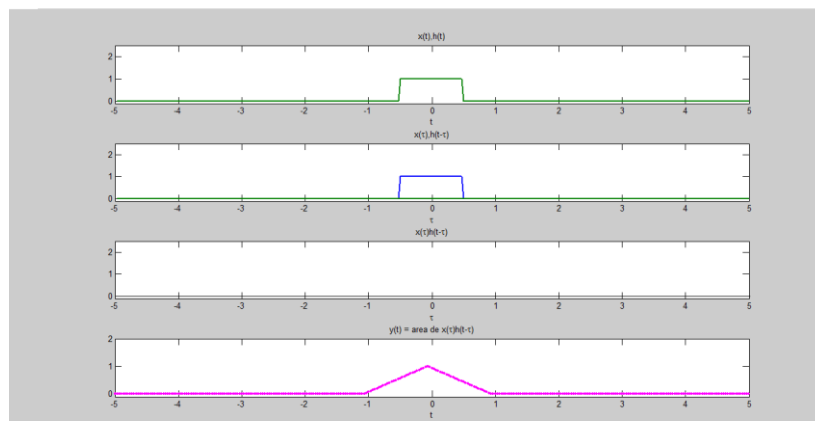
Calcular y graficar en Matlab la señal de salida del sistema a través de la integral de convolución $y(t)=x(t)*h(t)$.

Solución

Resolvemos el problema corriendo en Matlab el programa correspondiente, tipeando en la ventana de comandos:

```
>>convolucion1
```

Se obtiene un gráfico como el siguiente

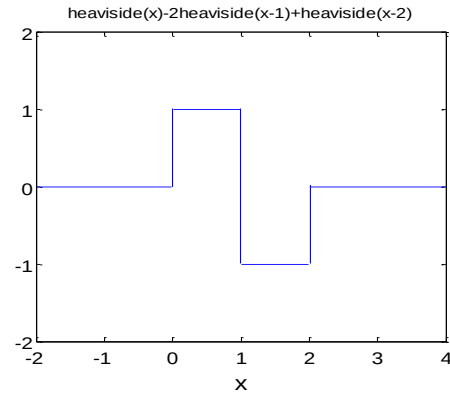
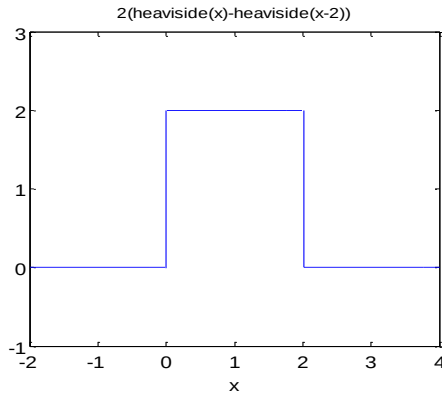


¿Qué características se observan en $y(t)$?

- El ancho de duración de la salida es la suma de los anchos de duración de $x(t)$ y $h(t)$. Es decir, $x(t)$ y $h(t)$ tienen duración 1 e $y(t)$ tiene duración $1+1=2$.
- La salida $y(t)$ comienza a tomar valores a partir de la suma de los tiempos iniciales de $x(t)$ y $h(t)$. Es decir, $x(t)$ y $h(t)$ comienzan en $t = -0,5$ y $y(t)$ comienza en $t = -0,5+(-0,5) = -1$.
- La salida $y(t)$ es continua.
- La salida presenta dos tramos no nulos, el primero de pendiente positiva entre $0 \leq t \leq 1$ y el segundo de pendiente negativa. El primero se corresponde con el intervalo en que el pulso que desplazamos va entrando en el que dejamos fijo. A medida que ocurre esto, el área que calculamos para cada t va aumentando con el desplazamiento de t . Luego de que el pulso desplazado entra en el que dejamos fijo, comienza a salir del mismo en $1 \leq t \leq 2$, por lo que el área

del producto comienza a disminuir, hasta que finalmente el pulso desplazado sale completamente. A partir de allí $y(t)=0$.

b) Considere ahora una señal de entrada $x(t)$ como la que se observa a la izquierda y una respuesta al impulso $h(t)$ como la de la derecha



Resolver con Matlab la convolución primero usando la definición

$$y_1(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau ,$$

y luego aplicando $y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau .$

Solución

Ejecute primero `>>convolucion2` y observe los resultados para y_1 .

Ejecute ahora `>>convolucion2b` y observe los resultados para y_2 .

Compare las salidas obtenidas: ¿Qué conclusión obtiene? ¿Qué propiedad acaba de verificar?

.....

.....

.....

.....

Seminarios con Matlab

MATEMATICA AVANZADA - SEMINARIO I

Temas de variable compleja y análisis de señales en el dominio temporal

I) Algunos cálculos básicos en variable compleja utilizando Matlab

1. a) Obtener las raíces, z_i ($i=1,2,3$), del siguiente polinomio:

$$f(z)=z^3+z^2+2z+8$$

Matlab nos permite hacer este cálculo utilizando la función 'roots'.

```
>> n=[1 1 2 8]; % Vector de coeficientes del polinomio.
>> zi=roots(n)
zi =
-2.0000
0.5000 + 1.9365i
0.5000 - 1.9365i
```

- b) Obtener las raíces del denominador del integrando del ejercicio 17. b) de la guía 1.

2. Halle la expresión en coordenadas polares de las raíces de a).

Las raíces halladas en a) están expresadas en coordenadas cartesianas. Con Matlab es muy sencillo obtener la expresión en coordenadas polares, utilizando las funciones 'abs' para obtener el módulo y 'phase' para obtener el ángulo o fase.

```
>> % Módulo y fase de zi

>> zm=abs(zi) % Devuelve los módulos de cada elemento del
               % vector zi
zm =
2.0000
2.0000
2.0000

>> zf=phase(zi) % Devuelve las fases de cada elemento del
                 % vector zi
zf =
3.1416
1.3181
-1.3181

% Tenga en cuenta que la fase está dada en radianes.
```

3. Otra aplicación de mucha utilidad es la que permite obtener una expansión en fracciones simples de un cociente de polinomios, cálculo que suele resultar trabajoso cuando se tienen 3 o más raíces en el denominador, o cuando las mismas son complejas. Por ejemplo, si deseamos escribir la siguiente función como una suma de fracciones simples:

$$F(z) = \frac{2z+1}{z^3 + 4z^2 + 13z}$$

Matlab nos permite simplificar los cálculos mediante la instrucción 'residue', que da las raíces del denominador (polos de $F(z)$, **p**), los coeficientes de las fracciones (residuo de $F(z)$ en cada punto singular, **r**) y el término directo, **k**. Las entradas que deben darse a la función 'residue' son los coeficientes del numerador y el denominador.


```

>> % Para la función dada:

>> n=[0 0 2 1]; % Coeficientes del numerador.
>> d=[1 4 13 0]; % Coeficientes del denominador.
>> [r,p,k]=residue(n,d)

r =
-0.0385 - 0.3077i
-0.0385 + 0.3077i
0.0769
p =
-2.0000 + 3.0000i
-2.0000 - 3.0000i
0
k =
[]

```

Podemos convertir los números complejos a polares:

```

rm=abs(r)
rm =
0.3101
0.3101
0.0769

>> rf=phase(r)
rf =
-1.6952
1.6952
0

```

Ahora estamos en condiciones de escribir nuestra función como suma de fracciones simples:

$$F(z) = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} + \frac{C}{z - z_3}$$

$$F(z) = \frac{0.3101 e^{-j1.6952}}{z + 2 - j3} + \frac{0.3101 e^{j1.6952}}{z + 2 + j3} + \frac{0.0769}{z}$$

Para polos complejos conjugados la suma de fracciones simples puede expresarse también como:

$$F(z) = \frac{A_1 + B_1 z}{(z - z_1)(z - z_2)} + \frac{C_1}{(z - z_3)}$$

$$F(z) = \frac{0.6202[(z + 2)\cos(1.6952) - 3\sin(1.6952)]}{(z + 2)^2 + 9} + \frac{0.0769}{z}$$

a) Halle la expansión en fracciones simples de $F(z) = \frac{4z^2 - 3}{z^3 - z^2 - 5z - 3}$.

b) Halle la expansión en fracciones simples de $F(z) = \frac{z^3 + z - 8}{z^3 - 2z^2 - 5z - 6}$

Nota: utilice el 'help' de Matlab para interpretar los resultados.

II) Análisis de señales en el dominio temporal

a) Grafique la función $f_1(t) = \sin(2/t)$ y observe la existencia de infinitos máximos y mínimos.

```
>> t=[0.001:0.001:1]; % vector de tiempo
>> f1=sin(2./t); % función (observe que para dividir por un vector
% punto a punto se utiliza './'
>> plot(t,f1) % grafica (vector de abscisas, vector de ordenadas)
```

b) Calcule la función $f_2(t) = \text{sinc}(t) = \sin(t)/t$

```
>> t=[-20:0.1:20]; %vector de tiempo que incluye al cero
>> f2=sin(t)./t; % función
```

En algunas versiones de Matlab aparece un mensaje de “warning”. Esta advertencia se debe a que el vector de tiempo incluye el cero y Matlab no puede hacer la cuenta para ese valor. Para solucionar esto definimos nuevamente el vector ‘t’.

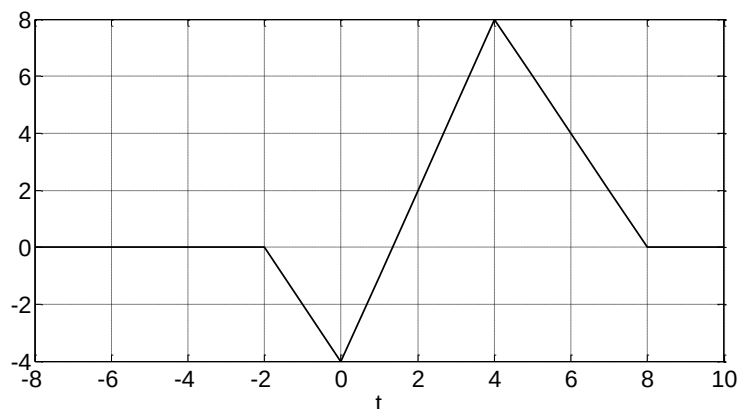
```
>> t=[-20:0.3:20]; %vector de tiempo que NO incluye al cero
>> f2=sin(t)./t; % función
```

Grafique $f_2(t)$, $f_2(2t)$, $f_2(t/2)$ y $f_2(t-10)$ en un mismo gráfico.

```
>> f2a=sin(2*t)./(2*t);
>> f2b=sin(t/2)./(t/2);
>> f2c=sin(t-10)./(t-10);
>> plot(t,f2,'k',t,f2a,'r',t,f2b,'b',t,f2c,'g') % grafica las señales
% ('k',negro,'r',rojo,'b',azul,'g',verde)
>> grid on % dibuja la grilla
```

c) Con Matlab podemos generar nuestras propias funciones y luego utilizarlas para hacer los cálculos que se deseen.

c1- Crear una función con Matlab que represente el siguiente gráfico:



Para crear una función, en la barra de Matlab seleccione ‘File’, ‘New’, ‘M_file’. Esto abrirá una nueva página del editor. Allí transcriba el siguiente texto, que corresponde a la función del gráfico. En la primera línea se declara que se trata de una función denominada ‘f3’, cuyo argumento es ‘t’. Esto debe tenerse en cuenta cuando se llama a la función, que será invocada como f3(argumento).

```

function y=f3(t)

% Calcula la expresión funcional correspondiente a cada intervalo de t.

y1=-4-2*t;
y2=-4+3*t;
y3=16-2*t;

% Une las diferentes expresiones funcionales en sus respectivos intervalos
% de validez.

y=y1.*(-2<t & t<=0)+y2.*(0<t & t<=4)+y3.*(4<t & t<=8);

```

Guarde la función con el nombre correspondiente. Para ello, en el editor vaya a 'File', 'save as...', asegúrese de que esté en el directorio o carpeta deseado y nombre a la función f3.m. Guárdela.

Interprete la última línea del programa anterior.

c2- Obtenga las siguientes funciones desplazando, comprimiendo, dilatando y cambiando la escala de f3:

- $g_1=3*f_3(t-5)$
- $g_2=0.5*f_3(3t)$
- $g_3=-2*f_3((t+1)/2)$

Grafique las cuatro funciones en el mismo gráfico y evalúe lo obtenido comparando con lo que hubiera esperado obtener. Para utilizar la función asegúrese de estar en el directorio donde la misma está guardada. (Observe 'Current directory')

```

>> t=[-8:0.1:15]; % Genera el vector de tiempo
>> g1=3*f3(t-5);
>> g2=0.5*f3(3*t);
>> g3=-2*f3((t+1)/2);
%% Dibujamos las tres funciones en una misma figura, junto con la
%% señal original.
>> g0=f3(t);
>> subplot(2,2,1); plot(t,g0);grid on
>> subplot(2,2,2); plot(t,g1);grid on
>> subplot(2,2,3); plot(t,g2);grid on
>> subplot(2,2,4); plot(t,g3);grid on

```

d) Repita el inciso c) para la función $f_4(t) = (1 + \sin(\pi t)) e^{-t/2} u_s(t)$.

MATEMÁTICA AVANZADA - SEMINARIO 2

Matrices

I) Operaciones básicas con matrices utilizando Matlab.

Ingresa dos matrices de 4x4, **A** y **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

```
>> A=[1 2 4 -1;0 -1 3 1;1 5 0 1;2 -1 3 1];  
>> B=[0 1 2 0;1 1 -2 1;-3 0 1 2;1 2 -1 3];
```

Realizar con ellas las siguientes operaciones:

- Matriz inversa de **A** y matriz inversa de **B**.

```
>> Ai=inv(A)  
>> Bi=inv(B)
```

- Matriz inversa de (**A*B**).

Comparar el resultado con $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ y con $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

- Matriz traspuesta de **A** y matriz traspuesta de **B**.

```
>> At=A'  
>> Bt=B'
```

- Matriz traspuesta de (**A*B**).

Verifique que se cumple la igualdad $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ y que $(\mathbf{AB})^T \neq \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$.

- Determinante de **A** y determinante de **B**.

```
>> Da=det(A)  
>> Db=det(B)
```

- Determinante de (**AB**).

Verifique que se cumple la igualdad: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

- Autovalores (**L**) y autovectores (**V**) de **A** y de **B**.

```
>> eig(A) %Vector de autovalores  
% Si además se quieren obtener los autovectores:  
>> [V,L]=eig(A) % V: matriz con autovectores en las columnas  
% L: matriz diagonal de autovalores
```

Verifique que se cumple la igualdad: $\mathbf{A}*\mathbf{V} = \mathbf{V}*\mathbf{L}$.

```
% Puede hacerse para cada uno de los autovalores y autovectores  
>> A*V(:,1) % Producto de la matriz A por la primera columna  
% de la matriz V (Primer autovector)  
>> V(:,1)*L(1,1) % Productor del elemento (1,1) de la matriz L  
% con la primera columna de la matriz V.  
  
% También puede comprobarse directamente  
>> A*V  
>> V*L
```

II) Propiedades de la matriz de transición de los estados $\varphi(t)=e^{At}$.

Comprobaremos algunas propiedades de la matriz de los estados. Para ello consideremos la matriz:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2\frac{\sqrt{3}}{3}e^{2t}\sinh(\sqrt{3}t) + e^{2t}\cosh(\sqrt{3}t) & \frac{\sqrt{3}}{3}e^{2t}\sinh(\sqrt{3}t) \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}e^{2t}\sinh(\sqrt{3}t) & -2\frac{\sqrt{3}}{3}e^{2t}\sinh(\sqrt{3}t) + e^{2t}\cosh(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

Esta matriz ha sido guardada como una función de Matlab: `fi.m`, cuyo argumento es t .

Para evaluar en un valor dado de $t=t_i$ simplemente debe escribirse la expresión

```
>> fi(ti)
```

- Compruebe la propiedad que establece que $\varphi(0)=I$.

```
>> fit0=fi(0)
```

- Verifique que se cumple la propiedad $\varphi(t_1+t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)$ siendo $t_1=2$ y $t_2=3$.

```
>> fit2=fi(2)
```

```
>> fit3=fi(3)
```

```
>> fit5=fi(5)
```

```
>> fit2*fit3
```

- Dado el vector de estados iniciales, $x(0)=[1;-3]$, calcule $x(t)$ para $t=2$, $t=3$ y $t=5$ utilizando la propiedad $x(t)=\varphi(t-t_0)x(t_0)$.

¿Qué observa en los valores de la solución a medida que transcurre t ? ¿Cómo se relaciona esto con la estabilidad del sistema? ¿Es un sistema estable? Justifique.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

MATEMÁTICA AVANZADA - SEMINARIO 3

Serie de Fourier

1) Considere nuevamente el ejercicio 14 de la guía de TP nº4, en el que se encontró que

$$V_0(t) = 12 \left[\frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2n\pi 100t) \right]$$

a) Grafique el espectro de amplitud y fase para las cinco primeras armónicas.

¿Qué características observa en ambos espectros?

.....

b) Grafique la señal reconstruida usando las cinco primeras armónicas.

¿Qué tan buena es dicha reconstrucción?, ¿a qué se debe eso?

.....

.....

c) Calcule la potencia media de la señal y la contenida en las primeras cinco armónicas.

¿Qué porcentaje de la potencia total está contenido en el cálculo anterior?

.....

d) Repita los incisos anteriores para otros números de armónicas (por ejemplo, 3 y 10).

Solución:

De la expresión de $V_0(t)$, obtenemos que $\frac{a_0}{2} = \frac{24\sqrt{2}}{\pi}$ y $a_n = \frac{48\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}$

y por lo tanto $c_0 = \frac{24\sqrt{2}}{\pi}$ y $c_n = \frac{24\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}$

a) Empecemos por definir una cantidad de armónicas (supongamos $n=5$), calculemos y grafiquemos los respectivos espectros de amplitud y fase.

```
n=5 %Consideremos las cinco primeras armónicas
Cn=24/pi*sqrt(2)./(1-4*[-n:n].^2); %Calculamos los Coeficientes de Fourier
desde n=-5 a n=5
amplitud=abs(Cn); %Calculamos el espectro de amplitud
fase=phase(Cn); %Calculamos el espectro de fase
fase(1:n)=-fase(1:n); %Cambiamos por convención pi a -pi la fase de los Cn con
índice negativo
%Graficamos
figure; subplot(2,1,1); stem([-n:1:n],amplitud); title('Espectro de
Amplitud');
subplot(2,1,2); stem([-n:1:n],fase); title('Espectro de Fase');
```

b) Reconstruimos la señal para las cinco primeras armónicas

```
%Reconstruimos la señal
t=[0:.0001:.03]; % definimos nuestro vector de tiempos
clear i % eliminamos la variable i para que no se confunda con la unidad
imaginaria
for j=1:length(t)
vr(j)=sum(Cn.*exp(i*[-n:n]*2*pi*100*t(j))); %reconstruimos la señal (note el
w0 usado)
end
vo=12*sqrt(2)*abs(sin(2*pi*50.*t)); %calculamos la señal original
figure; plot(t,vr,t,vo,'r'); title('señal reconstruida (azul) vs. señal
original (rojo)');
```

c) Calculemos la potencia media de la señal realizando la integral en el tiempo. Recordemos que la señal tiene período $T=0.01$ y la potencia media de la señal se obtiene mediante

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T |V_o(t)|^2 dt$$

Finalmente obtenemos la potencia contenida en las n primeras armónicas.

```
syms t; %Creación de una variable de integración de tipo simbólico
T=.01; %Definimos el período de la señal
Pm=1/T*int('(12*2^0.5*abs(sin(2*pi*50*t)))^2',t,0,T)
%La función int integra el integrando entre comillas tomando como variable de
integración t entre 0 y T
```

```
%Por el teorema de Parseval
%Pm=abs(C0)^2+2*abs(C1)^2+2*abs(C2)^2+....
C0=Cn(n+1); %Recuerde que el coeficiente C0 es la componente n+1 de Cn
Pot_n_armonicas=abs(C0)^2+2*sum(abs(Cn(1:n)).^2)
```

Comentario:

En el inciso a) los coeficientes de la serie exponencial de Fourier (línea 2 del código del inciso a)) pueden calcularse usando un lazo 'for' mediante:

```
j=0;
for k=-n:n
j=j+1;
Cn(j)=24/pi*sqrt(2)*1/(1-4*k^2);
end
```

Mientras que en b) la potencia contenida en las n armónicas también podría haberse calculado mediante:

```
C0=Cn(n+1);
Pot_n_armonicas=C0^2
for k=n:-1:1
k
Pot_n_armonicas=Pot_n_armonicas+2*abs(Cn(k))^2
end
```

donde se muestran las potencias acumuladas desde la componente de continua (armónica cero) hasta finalmente la armónica n .

Nota: la función 'abs' calcula el módulo y la función 'phase' la fase del vector de coeficientes C_n .

2) Grafique la serie de Fourier correspondiente a un tren de impulsos dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

para las primeras n armónicas (para $n=5, 20, 50$ y 1000).

a) Instrucciones para inicializar período, frecuencia y vector de tiempos.

```
T=1; %consideramos un período igual a uno
Wo=2*pi/T; %calculamos la frec. angular fundamental
t=[0:T/100:5*T]; %consideramos un vector de tiempos de 0 a 5T en instantes
% equiespaciados con intervalos T/100
clear i %para evitar confundir la unidad imaginaria con posible variable.
```

Comparando con el ejercicio 1, ¿se necesitan más o menos armónicas para obtener una buena aproximación de la señal? Justifique su respuesta.

.....
.....
.....

b) A continuación calculamos la suma de las primeras n armónicas para $n=5, 20, 50$ y 1000 y las graficamos.

```
n=5;
y=1/T*sum(exp(i*[-n:n]*Wo*t)); %calculamos la suma parcial de la serie para
n=5
figure;plot(t,y);title('la serie reconstruida con las primeras 5 armónicas');
pause

n=20;
y=1/T*sum(exp(i*[-n:n]*Wo*t));%calculamos la suma parcial de la serie para
n=20
figure;plot(t,y);title('la serie reconstruida con las primeras 20 armónicas');
pause

n=50;
y=1/T*sum(exp(i*[-n:n]*Wo*t));%calculamos la suma parcial de la serie para
n=50
figure;plot(t,y); title('la serie reconstruida con las primeras 50 armónicas');
pause

n=1000;
y=1/T*sum(exp(i*[-n:n]*Wo*t));; %calculamos la suma parcial de la serie para
n=1000
figure;plot(t,y); title('la serie reconstruida con las primeras 1000
armónicas');pause
```

Otra forma de calcular la serie:

```
%Las instrucciones anteriores para el cálculo de las sumas también se pueden
realizar con un lazo for
suma=0;
for k=-n:n
    suma=suma+exp(i*k*Wo*t);
end
```

Nota: la función exponencial es 'exp'.

En ambos casos observe qué ocurre, tanto con la reconstrucción de la señal como con el cálculo de la potencia, al aumentar el número de armónicos.

.....
.....
.....
.....

MATEMÁTICA AVANZADA - SEMINARIO 4

Transformada de Fourier

1) Visualice las relaciones entre el ancho de un pulso en el tiempo y los cruces por cero de su transformada de Fourier para el par dado por:

$$P_a(t) \rightarrow a \operatorname{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right)$$

Solución

a) Instrucción para inicializar tiempos:

```
t=-10:.01:10;
```

b) Creamos el pulso en el tiempo:

```
ancho=1; %Inicializamos el ancho del pulso en 1
pulso = 1*(t>=-ancho/2 & t<=ancho/2); % Generamos el pulso
```

c) Creamos la transformada $a \operatorname{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right)$:

```
w=-6*pi:.01:6*pi;
funcion_sinc=ancho*sin(ancho*w/2)./(ancho*w/2);
```

d) Graficamos pulso y transformada en una misma figura:

```
figure;
subplot(2,1,1); hold on; plot(t,pulso); axis([-10 10 0 2]);
subplot(2,1,2); hold on; plot(w,funcion_sinc);
```

Repita los pasos b), c) y d) cambiando el ancho del pulso modificando el valor de la variable *ancho* a un valor entre 1 y 10.

Observe los gráficos resultantes y extraiga conclusiones.

¿Qué relación observa entre el ancho del pulso en el tiempo y el ancho de los lóbulos de la sinc en el dominio transformado?

.....
.....
.....

Verifique que también es posible crear el pulso en el inciso b) empleando la función predefinida *Heaviside*.

```
pulso=heaviside(t+ancho/2*ones(size(t)))-heaviside(t-ancho/2*ones(size(t)));
%equivalente a realizar Pa(t)=u(t+a/2)-u(t-a/2) donde a es el ancho del pulso
```

2) Considere ahora el ejercicio 35 de la guía de transformada de Fourier.

Dada $f(t) = \sin(\omega_0 t) P_a(t)$, una señal limitada en el tiempo, y su correspondiente transformada de Fourier

$$F(\omega) = -\frac{ja}{2} \left\{ \text{sinc} \left[\frac{a}{2} (\omega - \omega_0) \right] - \text{sinc} \left[\frac{a}{2} (\omega + \omega_0) \right] \right\}, \text{ grafique } f(t) \text{ y el espectro de amplitud } |F(\omega)|$$

considerando $\omega_0 \gg \frac{2\pi}{a}$. (Tome por ejemplo $\omega_0=10$ y $a=5$)

Solución:

```
clear i % borra la variable i para no confundir con la unidad imaginaria
wo=10; %define la frecuencia de la senoidal que forma f(t)
a=5; %define el ancho del pulso de f(t)
t=[-1.5*a:.01:1.5*a]; %define el vector de tiempos t
w=[-2*wo:.01:2*wo]; %define el vector de frecuencias w
f=sin(wo*t).*(t>-a & t<a); %calcula la f(t)
F=abs(i/2*(a*sin(a*(w-wo)/2)./(a*(w-wo)/2)-a*sin(a*(w+wo)/2)./(a*(w+wo)/2)));
%calcula el espectro de amplitud de F(w)
figure; subplot(2,1,1); plot(t,f); subplot(2,1,2); plot(w,F); %grafica la
función correspondiente y su espectro de amplitud en un mismo gráfico
```

Repita el ejercicio al aumentar y disminuir el ancho a de la señal en el tiempo y extraiga conclusiones.

¿Qué ocurre si no se cumple la condición $\omega_0 \gg \frac{2\pi}{a}$?

.....
.....
.....
.....

Transformada de Laplace. Variable de estado en el dominio transformado

1) La herramienta 'simulink' de Matlab permite simular y analizar modelos de diversos tipos, entre ellos, modelos en variables de estados. En primer lugar, observaremos el comportamiento de dos sistemas representados por modelos en variables de estado siguiendo las instrucciones dadas a continuación:

a) Abra la librería de simulink haciendo click en el ícono correspondiente o escribiendo simulink en el editor de comandos de MATLAB.

b) Haga click en abrir y cargue el archivo estados.mdl.

c) Haga doble click sobre cada modelo de estado y observe las matrices A, B, C, D de cada uno. ¿Cuál de ellos tiene cómo salidas a las variables de estado?

.....

d) Corra la simulación mediante el botón 'play' y haga doble click sobre los osciloscopios para ver las formas de onda. Identifique la parte transitoria y la parte permanente en la señal de salida.

¿Cuánto dura el transitorio aproximadamente?.....

2) Utilizando MATLAB vamos a obtener la respuesta analítica de un sistema representado por un modelo en variables de estado:

a) Ingrese las matrices $A = [-1 \ 0 \ 0; 1 \ -2 \ 0; 2 \ 2 \ -3]$; $B = [1; 0; 0]$; $C = [0 \ 0 \ 1]$; $D = 1$;

b) Obtenga la matriz de transición de los estados mediante las siguientes instrucciones:

```
>> syms s % Definimos la variable simbólica s.
>> I=eye(3); % Matriz identidad de 3x3
>> fis=inv(s*I-A) % Obtenemos transformada de la matriz de transición del
modelo.
>> fit=ilaplace(fis) % Matriz de transición.
```

Suponiendo que en $t=0$ los estados son $X_0 = [0;1;1]$, calcule la respuesta libre de los estados. Esto puede hacerse en el dominio temporal o en el dominio transformado.

```
% Cálculo en el dominio temporal
>> xt=fit*x0

% Cálculo en el dominio transformado
>> xs=fis*x0
>> xt=ilaplace(xs)
```

¿Las respuestas obtenidas por ambos caminos son iguales?

.....

¿Cómo calcularía la solución libre del sistema? Escríbala.

.....
.....
.....
.....