Ejercicios resueltos

1. Transformar la región determinada por y ≤ x ; y ≤ 1 ; x ≥ 0 mediante la transformación: $w = \frac{2z+j}{1+jz}$. Dibujar la región del plano z y su correspondiente en el plano w.

   Solución: Para aplicar la trasformación, es conveniente despejar primero *z* en función de *w*:

$$w = \frac{2z+j}{1+jz} \quad \Rightarrow \quad (1+jz)\,w = 2z + j$$

$$w + jzw = 2z + j$$

$$jzw - 2z = j - w$$

$$z\,(jw - 2) = j - w$$

$$z = \frac{j-w}{-2+jw}$$

   Ahora reemplazamos $z = x + jy$; $w = u + jv$, y trabajamos algebraicamente para separar parte real y parte imaginaria:

$$x + jy = \frac{j-(u+jv)}{-2+j(u+jv)} = \frac{-u+j(1-v)}{-2-v+ju} \cdot \frac{-2-v-ju}{-2-v-ju} =$$

$$x + jy = \frac{2u+uv+u-uv}{(v+2)^2+u^2} + j\,\frac{-2+2v-v+v^2+u^2}{(v+2)^2+u^2}$$

   La parte real de esta expresión es x , y la parte imaginaria es y.

   Nos queda: $x = \frac{3u}{x^2+(v+2)^2}$ $\quad y = \frac{u^2+v^2+v-2}{x^2+(v+2)^2}$

   Reemplazando en las ecuaciones que definen la región en el plano *z*,

$$y \le x$$

$$\frac{u^2+v^2+v-2}{x^2+(v+2)^2} \le \frac{3u}{x^2+(v+2)^2}$$

$$u^2 + v^2 - 3u + v \le 2$$

$$(u-3/2)^2 + (v+1/2)^2 \le 2 + 9/4 + 1/4$$

$$(u-3/2)^2 + (v+1/2)^2 \le 9/2$$

$$y \le 1$$

$$\frac{u^2+v^2+v-2}{x^2+(v+2)^2} \le 1$$

$$u^2 + v^2 + v - 2 \le u^2 + v^2 + 4v + 4$$

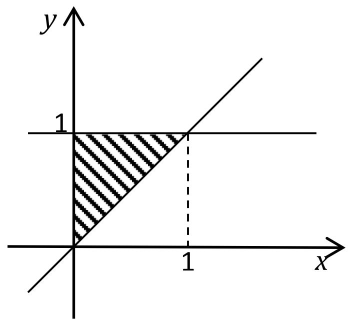
$$-3v \le 6$$

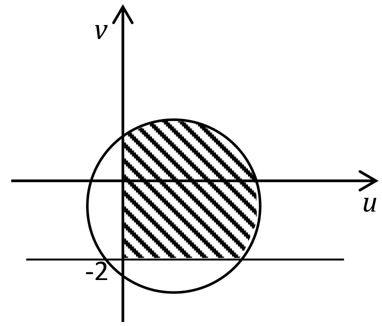
$$v \ge -2$$

$$x \ge 0$$

$$\frac{3u}{u^2+(v+2)^2} \ge 0$$

$$u \ge 0$$


y
1
1
x

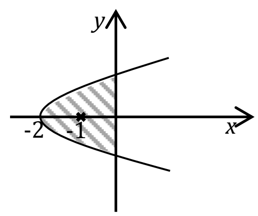

v
u
-2

Calcular la siguiente integral aplicando residuos: $\int_C \; sen\left(\frac{z}{z+1}\right)dz$ siendo C el contorno del recinto: $y^2 \le x + 2 \quad ; \quad x \le 0$

Para resolver esta integral vamos a utilizar el teorema de los residuos:

$\int_C \; f(z)dz = \sum Res_{z=z_i}[f(z)]$ siendo los z_i las singularidades de $f(z)$ pertenecientes a la región encerrada por la curva C.

En nuestro caso la única singularidad de la función es $z = -1$. Dibujamos la región para ver si esta singularidad está dentro o fuera de la misma.



Debemos, por lo tanto encontrar el valor del residuo de la función integrando en z = -1
Para hacerlo desarrollamos en serie dicha función usando el desarrollo en serie de Taylor en potencias de z+1. Pero como la función contiene en su expresión tanto z + 1 como z primero vamos a acomodar la función de manera que en su argumento solo aparezca z + 1. Utilizaremos la fórmula del seno de la suma de dos ángulos:

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cos\beta - \cos\alpha \, sen\beta$$

En nuestro caso es:

$$sen\frac{z}{z+1} = sen\frac{z+1-1}{z+1} = sen\left(\frac{z+1}{z+1} - \frac{1}{z+1}\right) = sen\left(1 - \frac{1}{z+1}\right)$$
$$= sen1\; cos\frac{1}{z+1} - cos1\; sen\frac{1}{z+1}$$

sen1 y cos1 son constantes. Vamos a desarrollar en serie el seno y coseno de 1/(z+1)

$$sen\frac{z}{z+1} = sen1\left[1 - \frac{1}{2!(z+1)^2} + \frac{1}{4!(z+1)^4} - \cdots\right] - cos1\;\left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^3} + \frac{1}{5!(z+1)^5} - \cdots\right]$$

De este desarrollo solo nos interesa obtener el residuo de la función dada en z = -1 y éste es el coeficiente de $(z+1)^{-1}$ en el desarrollo anterior, es decir:

$Res_{z=-1}\left[sen\frac{z}{z+1}\right] = -cos1$

Por lo tanto: $\int_C \; sen\left(\frac{z}{z+1}\right)dz = -j2\pi cos1$