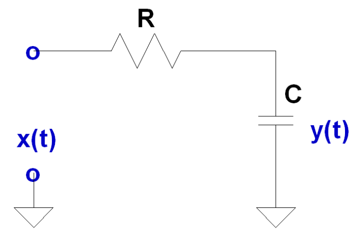
Ejercicio resuelto

Suponga la siguiente ecuación diferencial de primer orden que representa el comportamiento de un circuito RC como el de la figura.

$$\tau\, y'(t) + y(t) = x(t)$$



Donde $\tau=RC$, *x(t)* es la tensión aplicada e *y(t)* es la tensión en el capacitor.

Encuentre la respuesta total del sistema si la entrada es un escalón de amplitud 3 Volt y además y(0)=1 Volt.
Señale la respuesta en régimen permanente y la transitoria. ¿De qué depende cada una de ellas?
¿Cuál es la solución particular y cuál la homogénea?

SOLUCIÓN

1) Utilizando el método del **operador anulador** se encuentra directamente la solución total de la ecuación diferencial. Las desventajas de este método residen en que se aumenta el orden de ecuación y en que no se pude discriminar la respuesta libre de la forzada. La ventaja es que no se propone forma para la particular, en su lugar debe encontrarse el operador anulador.
Por otro lado no es un método que se pueda utilizar en funciones causales, entonces supondremos que la entrada es una constante en lugar de ser un escalón y en este caso, el operador anulador es sencillamente D. Aplicando el mismo a la ecuación, ésta queda:

$$\tau\, y''(t) + y'(t) = 0$$

Como la ecuación que nos ocupa es ahora de segundo orden es necesaria otra condición inicial, la cual se obtiene a partir de la ecuación diferencial original:

$$\tau\, y'(0) + y(0) = \tau . y'(0) + 1 = x(0) = 3$$

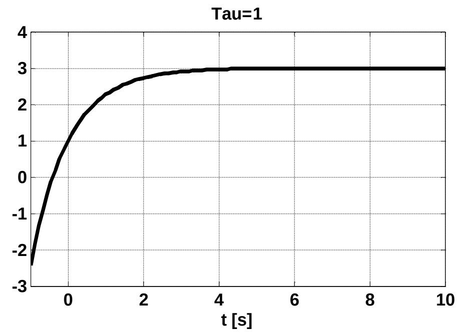
$$y'(0) = \frac{3-1}{\tau} = \frac{2}{\tau}$$

Por otro lado, las raíces características de la nueva ecuación son: $r = 0$ y $r = -1/\tau$. Entonces la solución tendrá la forma:

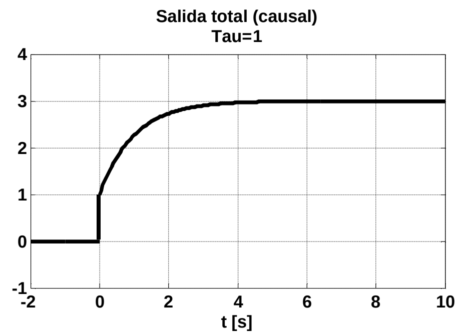
$$y(t) = c_1 + c_2 . e^{-t/\tau}$$

Luego, por el método de los coeficientes indeterminados se obtienen los valores de $c_1=3$ y $c_2= -2$. Entonces la solución de la ecuación diferencial original con las condiciones iniciales dadas, es:

$$y(t) = 3 - 2.e^{-t/\tau}$$



Si, como se dijo al principio, la entrada comienza en t=0 (entrada causal), es válido suponer, entonces, que la salida también comienza en t=0 (salida causal), como se observa en el siguiente gráfico:



2) Otra forma de obtener la solución total de esta ecuación es sumando la solución homogénea, es decir, aquella que es solución de la ecuación homogénea, y la solución particular ó solución en régimen permanente.
La forma de la solución homogénea depende de las raíces de la ecuación característica (una sola raíz en este caso $r = -1/\tau$). Entonces tendremos:

$$y_h(t) = c_1\, e^{-t/\tau}$$

La solución en régimen permanente tendrá la misma forma que la entrada, ya que es lo que queda cundo todos los transitorios se han extinguido y el sistema "sigue" a la fuente de excitación. Entonces:

$$y_p(t) = c_2$$

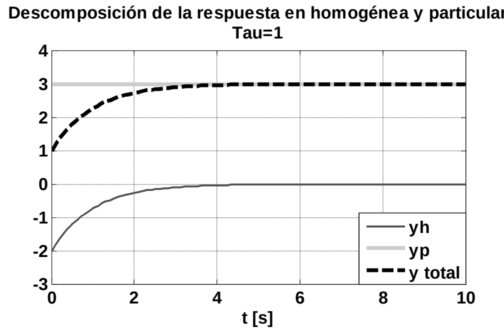
Observe que al resolver por este método estamos suponiendo señales no causales.
Como esta última ecuación es solución de nuestro sistema, podemos obtener c_2 reemplazando $y_p(t)$ en la ecuación diferencial:

$$\tau\, y_p'(t) + y_p(t) = \tau.0 + c_2 = x(t) = 3$$
$$c_2 = 3$$

Con este resultado y la condición inicial, otra vez por el método de los coeficientes indeterminados, hallamos la respuesta total y luego suponemos que se trata de señales causales:

$$y(t) = 3 + c_1.e^{-t/\tau}$$
$$y(0) = 3 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = -2$$

$$y(t) = (3 - 2.e^{-t/\tau})u(t)$$



3) Una tercera forma de encontrar la solución total no sólo permite separar la respuesta transitoria de la respuesta en régimen permanente, sino que también nos muestra cuál es la respuesta provocada por la fuente con condiciones iniciales nulas, es decir, la solución forzada, $y_f(t)$, y la respuesta debida únicamente a las condiciones iniciales o solución libre, $y_l(t)$. En este caso las condiciones iniciales se aplican sólo a la respuesta homogénea.
Este método también sirve, en principio, sólo para señales no causales. Se comienza proponiendo una solución particular que verifique la ecuación diferencial original. Entonces proponemos como solución forzada una de la forma:

$$y_f(t) = c_1 + c_2.e^{-t/\tau}$$

Luego analizo si verifica la ecuación diferencial:

$$\tau.y_f'(t) + y_f(t) = x(t)$$
$$\tau.(-\frac{c_2}{\tau}).e^{-t/\tau} + c_1 + c_2.e^{-t/\tau} = 3 \Rightarrow c_1 = 3$$

La otra constante se obtiene utilizando la condición inicial que, de acuerdo a la definición de solución forzada, deben ser nulas. Por lo tanto:

$$y_f(t) = 3 + c_2.e^{-t/\tau}$$
$$y_f(0) = 3 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -3$$
$$y_f(t) = 3 - 3.e^{-t/\tau}$$

La solución debida a las condiciones iniciales es:

$$y_l(t) = c_3\, e^{-t/\tau}$$

Entonces, aplicando la condición inicial dada en el problema obtenemos:

$$y_l(t) = e^{-t/\tau}$$

Luego, la respuesta total es la suma de las calculadas anteriormente, que al considerarse una estrada causal es:

$$y(t) = (3 - 2.e^{-t/\tau}).u(t)$$

4) Por último, podemos hallar la respuesta total separada en libre y forzada, tal como en el método anterior, utilizando la convolución, como se verá más adelante en el curso. Esta forma de hallar la salida del sistema sí es válida para señales causales y utiliza la denominada respuesta al impulso del sistema, que en este caso es:

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) .$$

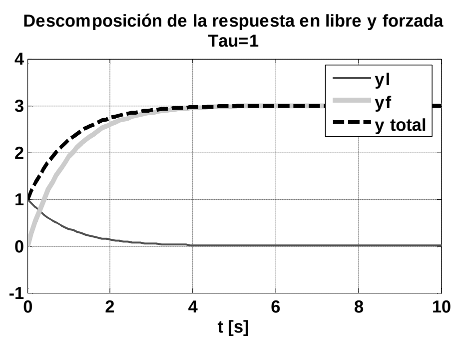
Esta función, convolucionada con la función de entrada, nos da la respuesta debida únicamente a la fuente.

$$y_f(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau} .e^{-\lambda/\tau} .3\, d\lambda = -3.e^{-\lambda/\tau}\Big|_0^t = 3.(1 - e^{-t/\tau}).u(t)$$

La solución libre se encuentra de la misma manera que con el procedimiento empleado en 3).
No todo el **transitorio** que aparece en la respuesta total se relaciona con las *condiciones iniciales*, en la respuesta transitoria también hay una componente debida a la *entrada*. Esto puede verse al observar la respuesta forzada, donde aparece un término transitorio.

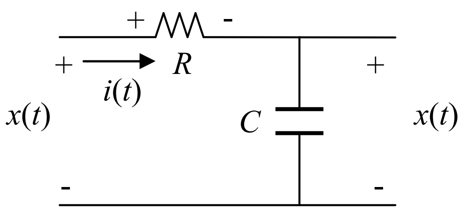
Por supuesto, la respuesta total es la misma que con los métodos anteriores:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = (3 - 2.e^{-t/\tau})u(t)$$



<u>Ejercicio 20</u>

a) Hallar la ecuación diferencial. Dibujar el diagrama en bloques.



$x(t)$: Tensión de excitación.

$y(t)$: Tensión en el capacitor.

$i(t)$: Corriente en la malla.

Suma de tensiones igual a cero: $x(t) - Ri(t) - y(t) = 0$

Reordenando: **1** $x(t) = Ri(t) + y(t)$, con $y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt$

Conviene hacer uso del operador *D*, recordando que $\frac{df(t)}{dt} = Df(t)$ y $\int f(t)dt = \frac{f(t)}{D}$,

Entonces podemos escribir $y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{i(t)}{CD}$ y $i(t) = CDy(t)$. **2**

Reemplazando **2** en **1**:

$$x(t) = RCDy(t) + y(t),$$

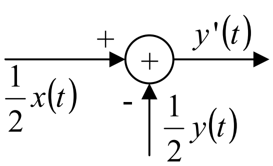
Teniendo en cuenta que R=2.10^3 y C=1.10^{-3}, entonces RC=2 y la ecuación queda:

$$\boxed{x(t) = 2y'(t) + y(t) \quad \text{Ecuación diferencial}}$$

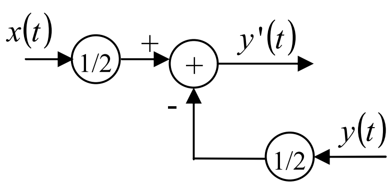
Para hacer un diagrama en bloques, lo usual es despejar en la ecuación diferencial la derivada de mayor orden de la salida, aunque puede haber otras opciones. En este caso, la derivada de mayor orden es $y'(t)$:

$$y'(t) = \frac{x(t) - y(t)}{2}.$$

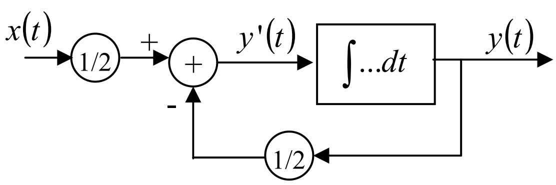
Luego se arma un sumador, donde la salida es $y'(t)$ y todo lo que está en el otro miembro de la ecuación diferencial se pone como entradas:



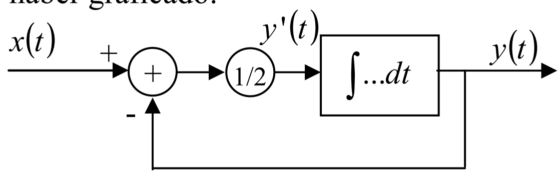
, que se grafica



Lo único que falta es integrar y'(t) para obtener y(t), con lo que el diagrama completo queda:



También podríamos haber graficado:



b) Hallar la respuesta al impulso.

Recuerde que el método para calcular la respuesta al impulso requiere que el coeficiente de la derivada de mayor orden del lado de la salida en la ecuación diferencial tenga coeficiente 1, es decir, a_n=1. Cuando esto no ocurre es necesario dividir toda la ecuación diferencial por a_n.

Además, el método no permite que sobre $x(t)$ haya operadores aplicados, es decir, $B(D)$=1. Cuando no es así, se encuentra la respuesta al impulso de un sistema que cumple este requisito y la llamamos $\hat{h}(t)$. Luego hacemos $h(t)=B(D)\hat{h}(t)$ para encontrar la respuesta al impulso buscada.

En nuestro caso a_n=2, por lo tanto debemos dividir nuestra ecuación diferencial por 2. Queda:

$$\frac{x(t)}{2}=y'(t)+\frac{y(t)}{2},$$

y ahora vemos que $B(D)$=1/2, por lo tanto encontraremos una $\hat{h}(t)$ y luego $h(t)=\frac{1}{2}\hat{h}(t)$.

$\hat{h}(t)$ es la respuesta al impulso del sistema $x(t)=y'(t)+\frac{y(t)}{2}$.

<u>Solución</u>:

Buscamos las raíces de la ecuación característica:

$$r+\frac{1}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad r=-\frac{1}{2} \text{ y } \hat{h}(t)=c_1 e^{-t/2}u_s(t)$$

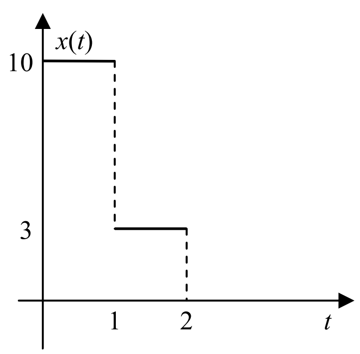
Como es un sistema de primer orden se necesita sólo una condición inicial, dada por $\hat{h}(0)=1 \quad \Rightarrow \quad c_1=1$ y

$$\hat{h}(t)=e^{-t/2}u_s(t).$$

Luego,

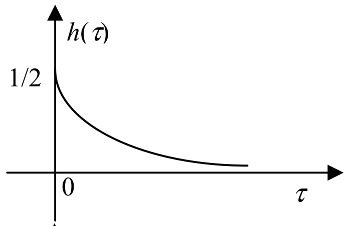
$$\boxed{h(t)=\frac{1}{2}\hat{h}(t)=\frac{1}{2}e^{-t/2}u_s(t)}$$

c) Hallar la solución forzada cuando la entrada es una función $x(t)$ como la de la figura y el sistema está en reposo (condiciones iniciales nulas).

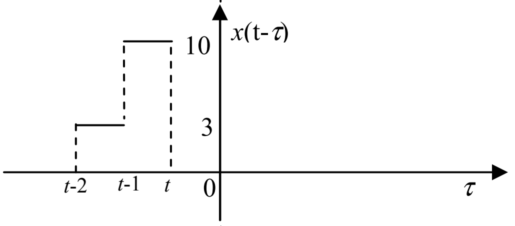


La salida debida a una entrada con condiciones iniciales nulas es la denominada SOLUCIÓN FORZADA, y se calcula haciendo la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso.
Como sabemos, la convolución es una operación conmutativa y, por lo tanto podemos elegir qué función vamos a invertir en el eje del tiempo. En este caso, haremos los cálculos invirtiendo $x(t)$, pero se sugiere hacerlo también invirtiendo $h(t)$ y comparar la dificultad de uno y otro cálculo.

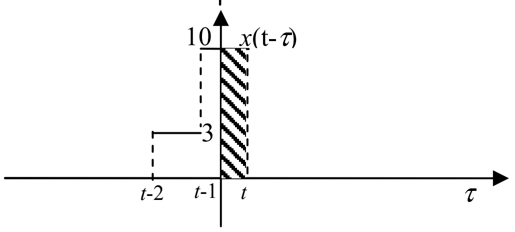
$$x(t)=\begin{cases}10 & 0\le t<1\\ 2 & 1\le t<2\\ 0 & \text{otros } t\end{cases} \quad \text{y} \quad x(t-\tau)=\begin{cases}10 & t-1\le \tau<t\\ 3 & t-2\le \tau<t-1\\ 0 & \text{otros } \tau\end{cases}$$



Recordar que en la convolución t es un parámetro móvil, que viene "viajando" desde $-\infty$ hasta $+\infty$, pero la integración es en la variable τ.



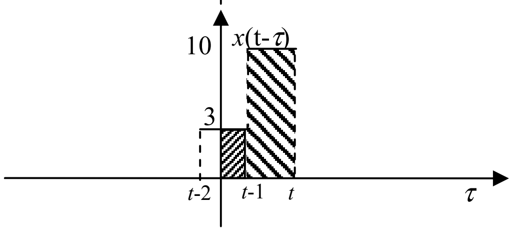
$$\underline{t<0} \quad y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau=0$$



$t\ge 0$ y $t-1<0$

$$\underline{0\le t<1} \quad y(t)=\int_0^t 10\frac{1}{2}e^{-\tau/2}d\tau=-10e^{-\tau/2}\Big|_0^t=$$

$$=10\left(1-e^{-t/2}\right) \quad \mathbf{1}$$



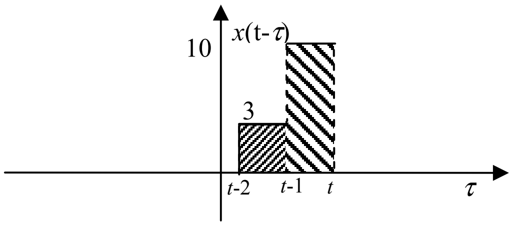
$t-1\ge 0$ y $t-2<0$

$$\underline{1\le t<2} \quad y(t)=\int_0^{t-1} 3\frac{1}{2}e^{-\tau/2}d\tau+\int_{t-1}^{t} 10\frac{1}{2}e^{-\tau/2}d\tau=$$

$$=-3e^{-\tau/2}\Big|_0^{t-1}-10e^{-\tau/2}\Big|_{t-1}^{t}=$$

$$=3\left(1-e^{-(t-1)/2}\right)+10\left(e^{-(t-1)/2}-e^{-t/2}\right)=$$

$$=3+7\left(e^{1/2}-10\right)e^{-t/2}=3+1.5410\,e^{-t/2} \quad \mathbf{2}$$



$t-2\ge 0$

$$\underline{t\ge 2} \quad y(t)=\int_{t-2}^{t-1} 3\frac{1}{2}e^{-\tau/2}d\tau+\int_{t-1}^{t} 10\frac{1}{2}e^{-\tau/2}d\tau=$$

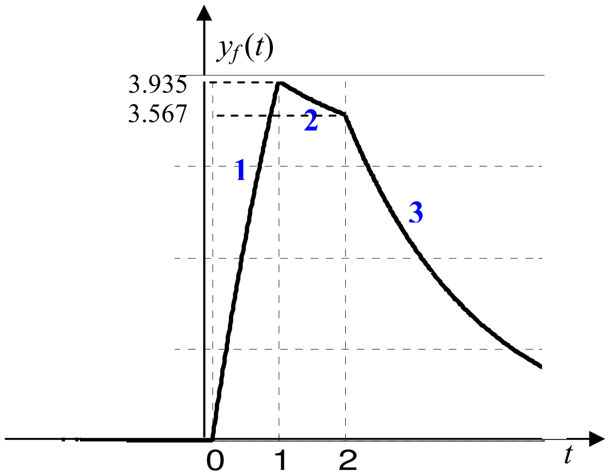
$$=-3e^{-\tau/2}\Big|_{t-2}^{t-1}-10e^{-\tau/2}\Big|_{t-1}^{t}=$$

$$=3\left(e^{-(t-2)/2}-e^{-(t-1)/2}\right)+10\left(e^{-(t-1)/2}-e^{-t/2}\right)=$$

$$=\left(7e^{1/2}+3e^{1}-10\right)e^{-t/2}=9.6959\,e^{-t/2} \quad \mathbf{3}$$

$$y_f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 10\left(1-e^{-t/2}\right) & 0 \le t < 1 \\ 3+1.5410\,e^{-t/2} & 1 \le t < 2 \\ 9.6959\,e^{-t/2} & t \ge 2 \end{cases}$$

I

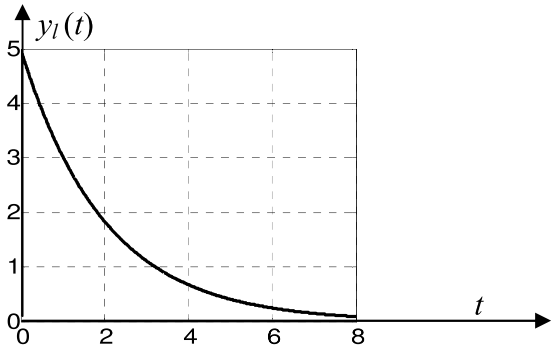


d) Hallar la solución total cuando, además de tener la entrada del inciso c), la condición inicial es $y(0)=5$.

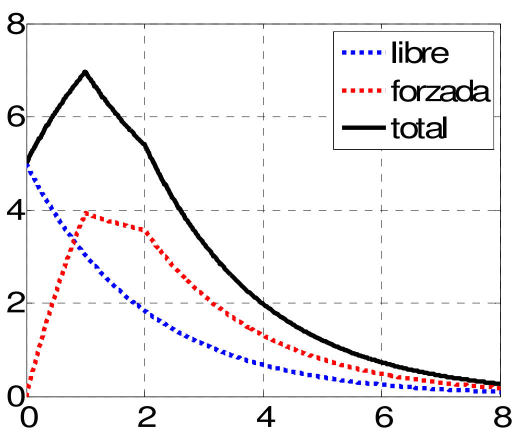
Solución:

En este caso la solución total está compuesta por la solución forzada calculada antes y la SOLUCIÓN LIBRE, que es solución de la ecuación diferencial homogénea con las condiciones iniciales dadas y, por lo tanto, tiene la forma:

$$y_l(t) = c_2 e^{-t/2}$$
$$y_l(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 5$$
$$y_l(t) = 5e^{-t/2}$$



SOLUCIÓN TOTAL: $y(t)=y_l\,(t)+y_f\,(t)$



Cuando la entrada puede ponerse como una suma de escalones, como en este caso, existe otra forma de calcular la solución forzada que puede simplificar la resolución porque evita calcular la convolución.
Observe que puede escribirse la entrada como $x(t)=10u_s(t)-7u_s(t-1)-3u_s(t-2)$.

La respuesta al escalón unitario, $g(t)$, se obtiene integrando la respuesta al impulso:

$$g(t)=\int_o^t h(\lambda)d\lambda=\int_o^t \frac{1}{2}e^{-\tau/2}d\tau=(1-e^{-t/2}) \qquad t\geq 0$$

Luego, teniendo en cuenta que el sistema es lineal e invariante en el tiempo, podemos aplicar el principio de superposición.

$x(t)=u_s(t) \longrightarrow$ Sistema $\longrightarrow y(t)=g(t)$

$u_s(t-a) \longrightarrow$ Sistema $\longrightarrow g(t-a)$

$u_s(t) + u_s(t-a) \longrightarrow$ Sistema $\longrightarrow g(t) + g(t-a)$

$10u_s(t) - 7u_s(t-1) - 3u_s(t-2) \longrightarrow$ Sistema $\longrightarrow 10g(t) - 7g(t-1) - 3g(t-2)$,

con $g(t)=(1-e^{-t/2})u_s(t)$.

II $\boxed{y_f(t)=\underbrace{10(1-e^{-t/2})u_s(t)}_{\textbf{A}}\underbrace{-7(1-e^{-(t-1)/2})u_s(t-1)}_{\textbf{B}}\underbrace{-3(1-e^{-(t-2)/2})u_s(t-2)}_{\textbf{C}}}$

Observe que la expresión **II** es otra forma de escribir la función por tramos dada en **I**.

En $0\leq t<1$ vale sólo **A:** $y_f(t)=10(1-e^{-t/2})$

En $1\leq t<2$ se agrega **B**: $y_f(t)=10(1-e^{-t/2})-7(1-e^{-(t-1)/2})=3+1.5410e^{-t/2}$

Y para $t\geq 2$ se agrega **C**: $y_f(t)=3+1.5410e^{-t/2}-3(1-e^{-(t-2)/2})=9.6959e^{-t/2}$

Gráficamente puede verse que se obtiene la misma función que haciendo la convolución: