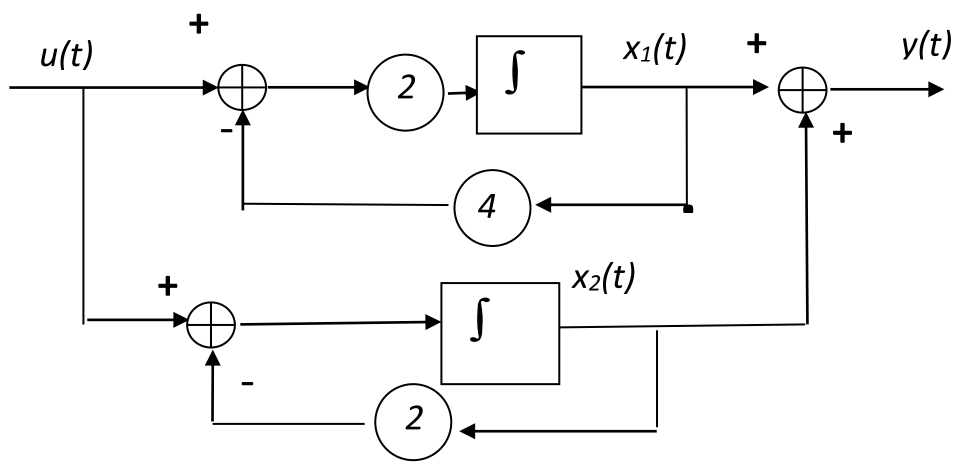
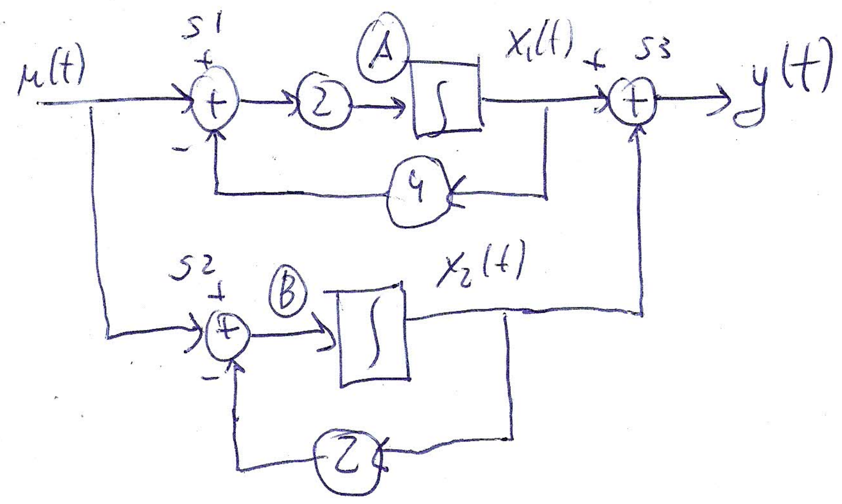
Ejercicio 2

A partir del siguiente diagrama en bloques,



a) Obtenga las matrices de su representación en variables de estado
b) ¿Es posible obtener una representación diagonal de la matriz de transición? De ser posible, escríbala.
c) Calcule y grafique la solución de los estados para una entrada escalón para un vector de estados iniciales $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
d) Calcule la salida temporal para el vector de estados iniciales considerando como entrada el escalón unitario.

Resolución ejercicio 2



a) Ya nos indican las variables de estado que deben usarse (note que hay tantas variables de estado como integradores tenga el sistema y las mismas se colocan a la salida de dichos integradores),

de modo que ahora es necesario armar las ecuaciones de estado correspondientes. Para ello, se plantean las ecuaciones que surgen de cada uno de los sumadores:

En el sumador S1, como $x_1(t)$ es la salida del integrador, la señal Ⓐ a la entrada debe ser $x_1'(t) = \dot{x}_1(t)$, por lo que la ecuación del sumador 1 resulta:

$$u(t) - 4x_1(t) = \frac{1}{2}\dot{x}_1(t) \qquad (1)$$

De modo análogo en el sumador S2,

$$u(t) - 2x_2(t) = \dot{x}_2(t) \qquad (2)$$

y en el sumador S3:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad (3)$$

Agrupando y trabajando las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2u(t) - 8x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

llegamos a la forma matricial

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

y del mismo modo:

$$y(t) = [1 \quad 1]\, \underline{x}(t) + 0 \cdot u(t)$$

con lo que las matrices correspondientes son:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1] \quad D = 0$$

b) Para poder obtener una representación diagonal de la matriz de transición es necesario que la matriz A sea diagonal. En ese caso, es importante recordar que los valores en la diagonal son los autovalores. En este caso particular, la matriz A es diagonal con valores -8 y -2 en la diagonal. La matriz transición $\phi(t)$ correspondiente es:

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-8t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

En el caso en que A no sea diagonal, es posible obtener una matriz de transición diagonal pero que va a corresponder a un sistema semejante. Esto será posible si todos los autovalores de A son distintos. Para obtener la matriz A del sistema semejante, que es llamada Av, se procede del siguiente modo:

1) Obtenemos los autovalores de la matriz A original

2) A partir de estos autovalores, obtenemos sus correspondientes autovectores

3) Formamos una matriz de transformación P tal que sus columnas van a estar formadas por los autovectores

4) El Av del sistema semejante será $A_v = P^{-1}AP$ y va a ser diagonal, con los autovalores obtenidos en 1) en el orden en que fueron colocados los autovectores en las columnas de P

5) La matriz de transición será entonces

$$\phi_v(t) = e^{A_v t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

donde λ_i, $i=1,\ldots,n$ son los autovalores de A en el orden dado en 4)

c) Cuando nos piden la solución natural de los estados, también llamada solución libre de los estados, se refieren al vector de variables de estado del sistema que resulta de condiciones iniciales sin ninguna entrada presente y la fórmula que debe aplicarse es:

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)} \cancel{x}(t_0),$$

donde deben las condiciones iniciales deben darse para un determinado tiempo t_0 en los valores del vector x

En nuestro caso, $t_0 = 0$

de modo que $x_l(t) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} e^{-8t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \mu_s(t)$

el término $u_s(t)$ aparece porque esas señales valen a partir del tiempo inicial $t_0 = 0$.

d) En este caso, se nos pide la solución $y(t)$ total que puede ser expresada como suma de una solución libre $y_\ell(t)$ y de una solución forzada $y_f(t)$.

Las formas más simples de obtener la parte libre de $y(t)$, es decir $y_\ell(t)$ son:

1) Usar lo hallado en c) ya que se usan las mismas condiciones iniciales y aplicar que $y_\ell(t) = C x_\ell(t)$ de modo que:

$$y_\ell(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} u_s(t) = e^{-2t} u_s(t)$$

2) La otra forma sería sabiendo que $y_\ell(t)$ tiene la forma de la solución homogénea $y_h(t)$, hallar la forma general de $y_\ell(t) = [C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}] u_s(t)$ con r_1, r_2 como raíces de la ec. característica del sistema y usar condiciones iniciales sobre $y_\ell(0)$ e $y_\ell'(0)$ que pueden deducirse de $\underline{X}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando las ecuaciones de vble. de estado. Con ello podemos despejar C_1 y C_2.

En este caso, r_1 y r_2 (que además de ser las raíces de la ec. característica son los autovalores de A) son -8 y -2 de modo que $y_\ell(t)$ tiene la forma $y_\ell(t) = [C_1 e^{-8t} + C_2 e^{-2t}] u_s(t)$

Por otro lado sabemos que

$y_{e}(t) = x_1 + x_2$ (1) (Recordemos que para $y_e(t)$, $u(t)=0$)

que derivado da

$y'(t) = x_1' + x_2'$ (2)

Reemplazando $t=0$ en (1) y (2) tenemos:

$y_e(0) = x_1(0) + x_2(0)$ (3)

$y_e'(0) = x_1'(0) + x_2'(0)$ (4)

pero podemos obtener $x_1'(0)$ y $x_2'(0)$ de $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) + B.\,u(t)$ (nuevamente $u(t)=0$)

con lo que (4) queda

$y_e'(0) = -8x_1(0) - 2x_2(0)$

Luego reemplazando $x_1(0)$ y $x_2(0)$ llegamos a:

$$\begin{cases} y_e(0) = 1 \\ y_e'(0) = -2 \end{cases}$$

Que luego usados para hallar C_1 y C_2 nos llevan nuevamente a:

$y_e(t) = e^{-2t} u_s(t)$.

Ahora es necesario encontrar la $y_f(t)$

Básicamente existen dos métodos prácticamente equivalentes

1) Usar la fórmula de variables de estado para la parte forzada de y(t)

es decir:

$$y_F(t) = \int_{t_0}^{t} C\phi(t-\tau)B\,u(\tau)\,d\tau + Du(t) \quad (1)$$

donde $\phi(t)$ es llamada matriz de transición calculada en b)

y $u(t)$ es la entrada, en este caso, el escalón unitario $u_s(t)$

Luego $y_F(t) = \int_0^t [1 \quad 1] \begin{bmatrix} e^{-8(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \quad (2)$

Note que (1) se trata de una convolución de dos señales causales por lo que $t_0 = 0$ y $u(\tau) = 1$ entre 0 y t.

Resolviendo (2)

$$y_F(t) = \int_0^t [e^{-8(t-\tau)} \quad e^{-2(t-\tau)}] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \int_0^t \left(2e^{-8(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)}\right) d\tau = 2e^{-8t}\cdot e^{8\tau}\Big|_0^t +$$

$$+ e^{-2t}\cdot e^{2\tau}\Big|_0^t = 2e^{-8t}(e^{8t}-1) + e^{-2t}(e^{2t}-1) =$$

$$= 2 - 2e^{-8t} + 1 - e^{-2t} = 3 - 2e^{-8t} - e^{-2t}$$

Recordando finalmente que se trata de una salida causal la forma correcta será $y_F(t) = (3 - 2e^{-8t} - e^{-2t})\,u_s(t)$

2) La fórmula desarrollada en (1) es, como se mencionó, una convolución, que es el método visto en sistemas lineales para calcular la solución forzada $y_f(t)$. Por lo tanto, en realidad el primer método es simplemente un desarrollo propio, para el modelo en variables de estado, de dicha convolución.

En forma general, recordemos que $y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$ (3)

La convolución puede resolverse también obteniendo $h(t)$ a partir de la descripción en variables de estado.

En este caso $h(t) = C\,\phi(t)\,B\,\mu_s(t) + D\,\delta(t)$

y nuevamente $u(t) = \mu_s(t)$.

Es fácil ver que dado que tanto $h(t)$ como $u(t)$ son causales a partir de (3) se llega a la ec. (1) vista en el método 1).

$$h(t) = (2e^{-8t} + e^{-2t})\,\mu_s(t)$$

y podemos aplicar también la propiedad de que la respuesta al escalón es la integral de la respuesta al impulso.

Finalmente, estamos en condiciones de escribir $y(t) = y_l(t) + y_f(t)$

$$y(t) = (e^{-2t} + 3 - 2e^{-8t} - e^{-2t})\,\mu_s(t) = \boxed{(3 - 2e^{-8t})\,\mu_s(t)}$$