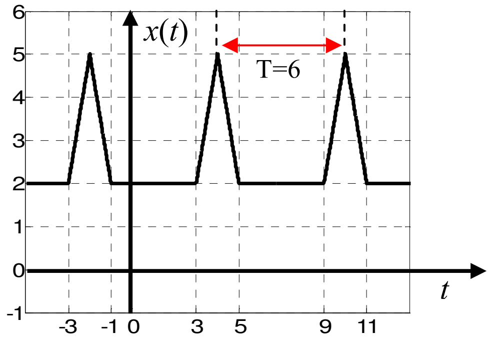
Ejercicios Resueltos

T.P. Nº 4: SERIE DE FOURIER

## Ejercicio 12

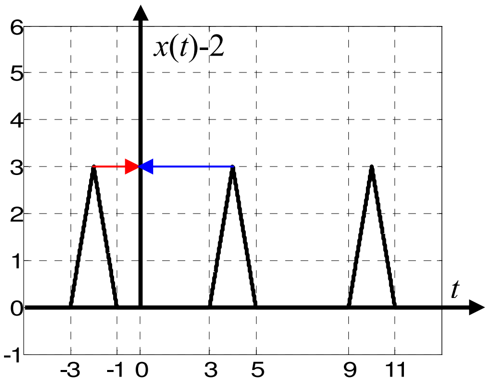
La señal dada es $x(t)$.



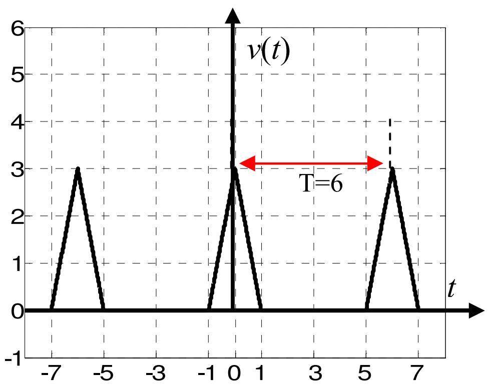

Se pide calcular los coeficientes de la Serie Trigonométrica de Fourier, es decir, $a_n$, $b_n$ y $a_0$.

Como la señal no tiene ningún tipo de simetría, las integrales para hallar los coeficientes de la serie serán por tramos (3 tramos).
Sin embargo, desplazando la señal tanto en la dirección de las '$x$' como en la de las '$y$', pueden simplificarse los cálculos.

Consideremos la señal $v(t)=x(t\text{-}2)\text{-}2$, que es una señal que se obtiene desplazando a $x(t)$ "para abajo", es decir, restando 2 en amplitud a toda la señal, con lo que queda:




y luego retardándola 2 unidades de tiempo (flecha roja figura 2):




Puede verse que la señal obtenida finalmente es una señal par.
OBSERVACIÓN: Podría haberse obtenido $v(t)$ adelantando a $x(t)$ en 4 unidades de tiempo (flecha azul figura 2) y la solución es igualmente válida: $v_2(t)=x(t+4)\text{-}2$.

Debido a la simetría que posee, la serie de $v(t)$ es más fácil de obtener que la de $x(t)$:

$$v(t)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cos(n\omega_0 t)+b_n^* \operatorname{sen}(n\omega_0 t).$$

Luego podemos recuperar $x(t)$ recordando que $v(t)=x(t-2)-2$, y entonces:

$$x(t)=v(t+2)+2=\frac{a_0^*}{2}+2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^*\cos(n\omega_0(t+2))+b_n^*\mathrm{sen}(n\omega_0(t+2)).$$

SOLUCIÓN. Coeficientes de $v(t)$

Porque entre x=1 y x=3 la señal vale cero.

$$\boxed{\frac{a_0^*}{2}}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}v(t)dt=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}v(t)dt=2\frac{1}{6}\int_{0}^{3}v(t)dt=2\frac{1}{6}\int_{0}^{1}(3-3t)dt=\frac{3}{3}\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Por ser señal par.

$a_0/2$ es el denominado valor medio de la señal y, cuando la forma de la función lo permite puede calcularse simplemente haciendo el cociente del área bajo la curva en un período de la señal y dicho período, es decir, en este caso:

$$\frac{a_0^*}{2}=\frac{A}{T}=\frac{2.3/2}{6}=\frac{1}{2}$$

Como la señal $v(t)$ es par, los coeficientes $b_n$ serán iguales a cero para todo $n$:

$$\boxed{b_n^*}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\underbrace{\overbrace{v(t)}^{\text{par}}\,\overbrace{\mathrm{sen}(n\omega_0 t)}^{\text{impar}}}_{\text{impar}}dt=\boxed{0}$$

La integral de una función impar es cero.

El único cálculo que resta hacer es el de los $a_n$.

$$\boxed{a_n^*}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}v(t)\cos(n\omega_0 t)dt=2\frac{2}{6}\int_0^1(3-3t)\cos(n\omega_0 t)dt=2\int_0^1(\cos(n\omega_0 t)-t\cos(n\omega_0 t))dt=$$

$$=2\left(\frac{\mathrm{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{(n\omega_0)^2}-t\frac{\mathrm{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right)\Bigg|_0^1=2\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\frac{n\pi}{3}}-\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}-\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\frac{n\pi}{3}}-0+\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}+0\right)=$$

$$=2\frac{1-\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}=2\frac{2\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}=\frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{\left(\frac{n\pi}{6}\right)^2}=\boxed{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$$

Se tuvo en cuenta que:

- $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{3}$
- $1-\cos(2\alpha)=2\mathrm{sen}^2(\alpha)$ (Tabla de equivalencias trigonométricas- Sadosky)
- $\frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\alpha}=\mathrm{sinc}(\alpha)$

Ahora ya podemos escribir a $v(t)$ por su representación en serie trigonométrica de Fourier:

$$v(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{3}t\right).$$

Y finalmente, obtenemos la representación en serie geométrica de Fourier de $x(t)$, nuestra función original:

$$\boxed{x(t)}=v(t+2)+2=\frac{1}{2}+2+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{3}(t+2)\right)=$$

$$=\boxed{\underbrace{\frac{5}{2}}_{\substack{a_0/2\\ \text{Valor medio}\\ \text{de } x(t)}}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}_{a_n}\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)-\underbrace{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}_{b_n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}t\right)}$$

Se usó la equivalencia trigonométrica: $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$, con $\alpha=\dfrac{2n\pi}{3}$ y $\beta=\dfrac{n\pi}{3}t$

OBSERVACIONES:

- La componente de continua quitada a $x(t)$, es decir, el valor de 2 que se le restó a toda la función, se suma al valor medio (componente de continua) de $v(t)$ para recuperar la función original.
- La función $x(t)$ no tiene simetría, por lo tanto tiene coeficientes $a_n$ y $b_n$ distintos de cero.

a) Serie exponencial de Fourier de $x(t)$.

Una vez obtenida la serie trigonométrica, puede obtenerse muy fácilmente la serie exponencial (y también a la inversa) a partir de la relación entre coeficientes.

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{jn\omega_0 t}\qquad o \qquad x(t)=c_0+\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{jn\omega_0 t}\quad n\neq 0$$

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{5}{2}$$

$$c_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)-j\left(-\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+j\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)e^{j\frac{2n\pi}{3}}$$

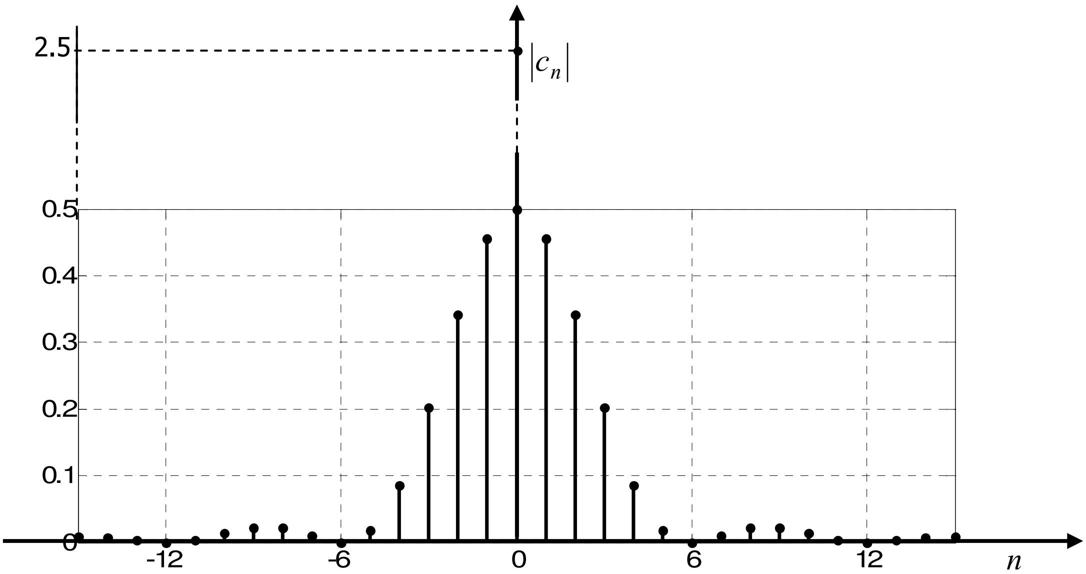
Entonces

$$x(t)=\frac{5}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)e^{j\frac{2n\pi}{3}}}_{c_n}e^{jn\frac{\pi}{3}t}\qquad n\neq 0$$

b) Espectro de amplitud y espectro de fase.

Recordemos que los $c_n$ son números complejos, por lo tanto los podemos expresar en módulo y fase.

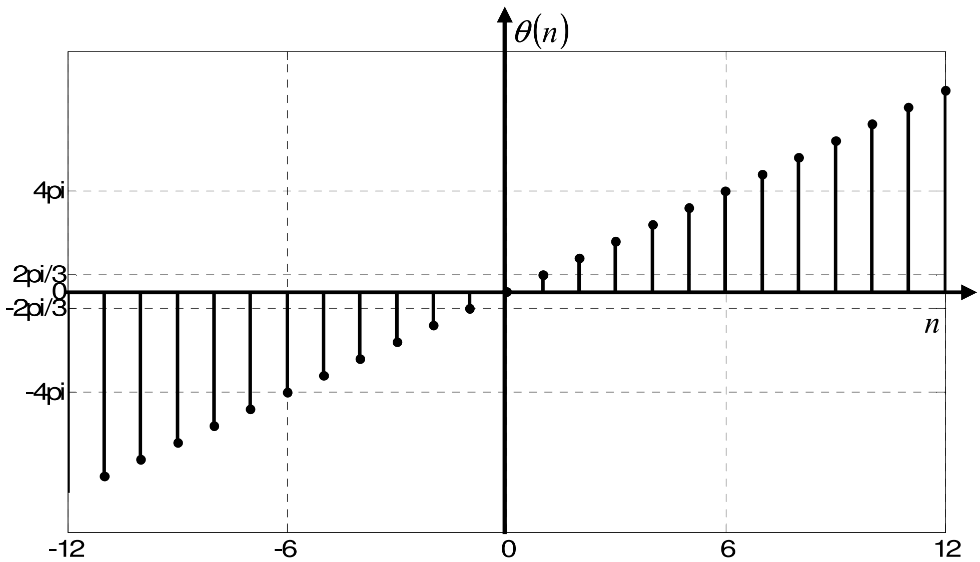
El espectro de amplitud está formado por los valores de los módulos de los $c_n$ para cada $n$, es decir, $|c_n| = \left| \frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right) e^{j\frac{2n\pi}{3}} \right| = \frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ .




Los ceros de la sinc se encuentran en $\frac{n\pi}{6} = k\pi$ , es decir, en $n = 6k$ (cada 6 $n$).

El espectro de fase es el gráfico de los valores de la fase de los $c_n$ para cada valor de $n$.

Sabemos que $c_n = \frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{6}\right) e^{j\frac{2n\pi}{3}}$ , y por lo tanto su fase será $\theta(n\omega_0) = \frac{2n\pi}{3}$ .




c) Los gráficos están hechos en función de $n$, pero podrían haberse hecho en función de $n\omega_0$, y allí se vería claramente que la separación entre barras es $\omega_0$.

> Recuerde: Los espectros de amplitud y fase de las **señales periódicas** son **discretos**.
> La envolvente NO es el espectro.

¿Qué significa la representación en serie de una función?
Cualquier función periódica pueden representarse mediante una serie de funciones trigonométricas de frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental de la señal dada. Esta serie es la denominada Serie de Fourier, que puede ser exponencial o trigonométrica. La serie converge el valor de la función, es decir, a medida que se suman más términos a la serie ésta es más “parecida” a la función que representa.

¿Cómo se calcula la expresión temporal de la componente k-ésima? ¿Cuál es su amplitud y cuál es su fase?

SERIE EXPONENCIAL

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

Expresión temporal de la primera armónica:
$x_1(t) = c_1 \, e^{j\omega_0 t} + c_{-1} \, e^{-j\omega_0 t} = |c_1| e^{j\theta_1} e^{j\omega_0 t} + |c_{-1}| e^{j\theta_{-1}} e^{-j\omega_0 t}$
Luego, teniendo en cuanta que si la señal es real los cn son números complejos conjugados, entonces $|c_n| = |c_{-n}|$ y $\theta_n = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(c_n)}{\mathrm{Re}(c_n)}\right) = -\theta_{-n}$ y
$x_1(t) = |c_1| e^{j\theta_1} e^{j\omega_0 t} + |c_1| e^{-j\theta_1} e^{-j\omega_0 t} = |c_1| \left( e^{j(\omega_0 t + \theta_1)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta_1)} \right) = 2|c_1| \cos(\omega_0 t + \theta_1)$
Expresión temporal de la segunda armónica: $x_2(t) = 2|c_2| \cos(2\omega_0 t + \theta_2)$
.
.
.
Expresión temporal de la armónica k-ésima: $x_k(t) = 2|c_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$

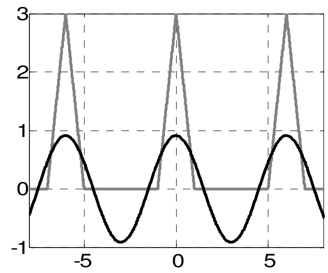
SERIE TRIGONOMÉTRICA

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)$$

Expresión temporal de la primera armónica: $x_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \mathrm{sen}(\omega_0 t)$
Expresión temporal de la segunda armónica: $x_2(t) = a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \mathrm{sen}(2\omega_0 t)$
.
.
.
Expresión temporal de la armónica k-ésima: $x_k(t) = a_k \cos(k\omega_0 t) + b_\mathrm{k} \mathrm{sen}(k\omega_0 t)$
.
.
.
Puede probarse que $x_k(t) = a_k \cos(k\omega_0 t) + b_\mathrm{k} \mathrm{sen}(k\omega_0 t) = R_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$
Con $R_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2} = 2|c_n|$ y $\phi_k = \arctan\left(\dfrac{-b_k}{a_k}\right) = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(c_n)}{\mathrm{Re}(c_n)}\right)$, recordando que $c_k = \dfrac{a_k - jb_k}{2}$.

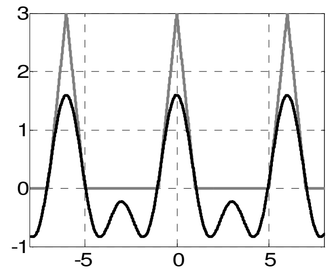
Veamos la aproximación por un número creciente de armónicas de la señal $v(t)$ estudiada antes.

Frecuencia fundamental ($f_0$=1/6 Hz)

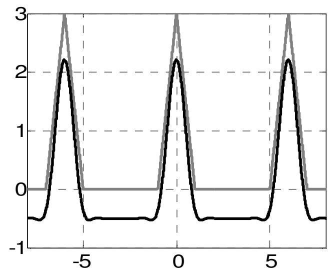



Gris: función exacta
Negro: aproximación por la serie

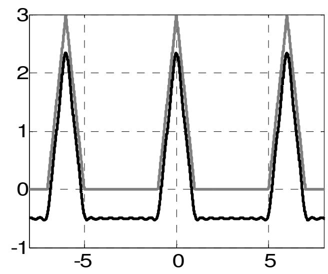
Hasta la segunda armónica



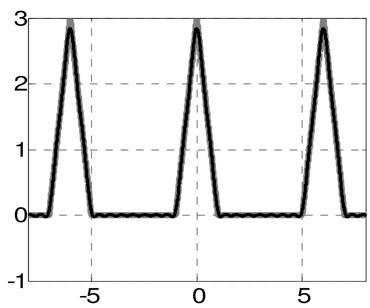

Hasta la quinta armónica




Hasta la décima armónica




¿Y por qué aparece esa diferencia en la amplitud?
Porque todavía no sumamos la componente de continua, el valor medio, que en el caso de $v(t)$ es $a_0/2$=1/2.




Y ahora si…

Resolución ejercicio 28 b) de la Guía de Trabajos Prácticos N° 4

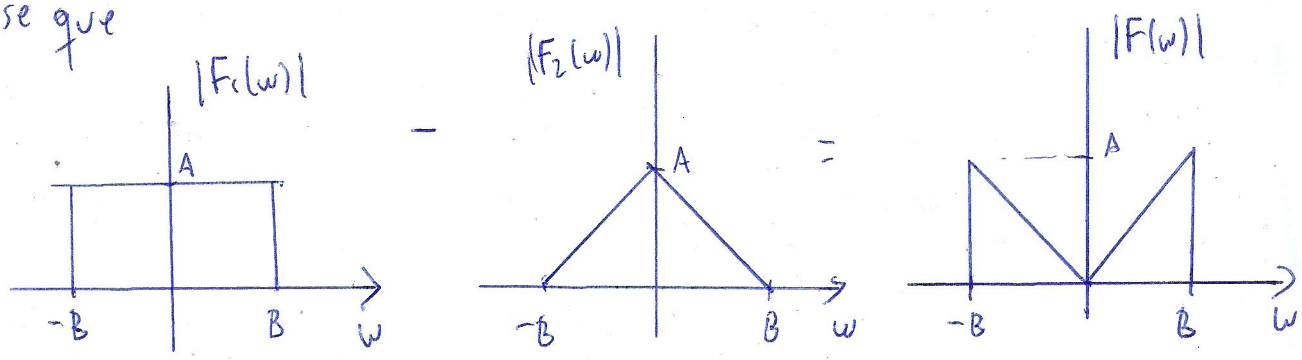
Empleando la sugerencia que se da, debemos armar cada función $F(w) = |F(w)| e^{j\theta(w)}$

Veamos como aplicar esto al ejercicio b)

Lo primero que debemos hacer es expresar $|F(w)|$ de un modo conveniente:

una posibilidad es observar que $|F(w)| = |F_1(w)| - |F_2(w)|$

con $|F_1(w)| = AP_{2B}(w)$ y $|F_2(w)| = AT_{2B}(w)$ ya que gráficamente puede verse que




Con esto, usando la sugerencia resulta

$$F(w) = |F(w)| e^{j\theta(w)} = (|F_1(w)| - |F_2(w)|) e^{j\theta(w)} =$$

$$= (AP_{2B}(w) - AT_{2B}(w)) . e^{j\theta(w)} \quad (1)$$

Pero $\theta(w) = \pi/2$ (constante para todo $w$), de modo que (1) sería:

$$F(w) = (AP_{2B}(w) - AT_{2B}(w)) e^{j\pi/2} \underset{\text{por Euler}}{=} (AP_{2B}(w) - AT_{2B}(w)) (\overset{0}{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}} + j\overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}})$$

$$= j (AP_{2B}(w) - AT_{2B}(w)) \quad (2)$$

La expresión hallada para $F(w)$ en (2) ya tiene forma conocida y en este punto debemos usar la tabla

En la tabla de Pares transformados observamos:

$$P_a(t) \longleftrightarrow a \,\text{sinc}\left(\frac{a w}{2}\right) \quad (3)$$

y

$$T_{2b}(t) \longleftrightarrow b \,\text{sinc}^2\left(\frac{b w}{2}\right) \quad (4)$$

Sin embargo, estas expresiones para los pulsos rectangulares y triangulares son correspondientes al tiempo y en nuestro caso están en el dominio de la frecuencia. Cuando esto ocurre, se debe aplicar la denominada propiedad de dualidad que dice:

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-w)$$

Esta propiedad significa que la transformada que se halle en la tabla en el dominio de la frecuencia, tiene su versión llamada dual en el dominio del tiempo. Aplicado a los pares (3) y (4), la aplicación de la propiedad de dualidad lleva a:

$$a \,\text{sinc}\left(\frac{a t}{2}\right) \longleftrightarrow 2\pi P_a(-w) \quad (5)$$

$$b \,\text{sinc}^2\left(\frac{b t}{2}\right) \longleftrightarrow 2\pi T_{2b}(-w) \quad (6)$$

Como los pulsos triangulares y rectangulares centrados en el origen como los que aparecen en (5) y (6) son pares, luego $2\pi P_a(-w) = 2\pi P_a(w)$ y

$$2\pi T_{2b}(-w) = 2\pi T_{2b}(w) \quad (7)$$

Ahora, si volvemos a la expresión original de $F(w) = j\left(A P_{2B}(w) - A T_{2B}(w)\right)$ $= jA P_{2B}(w) - jA T_{2B}(w)$, la $f(t)$ buscada será

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ jA P_{2B}(w) - jA T_{2B}(w) \right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ jA P_{2B}(w) \right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{ jA T_{2B}(w) \right\}$$

Es importante notar que la trasformada de Fourier y su antitrasformada son lineales con lo que la suma y resta de funciones transformadas equivalen a la transformada de la suma y resta (del mismo modo para la antitransformada) así como las constantes que aparecen multiplicando las expresiones en un dominio pueden trabajarse del mismo modo, es decir en nuestro caso; de lo visto en (5), (6) y (7) tenemos que

$$a \operatorname{sinc}\left(\frac{at}{2}\right) \longleftrightarrow 2\pi P_a(w) \quad (8)$$

$$b \operatorname{sinc}^2\left(\frac{bt}{2}\right) \longleftrightarrow 2\pi T_{2b}(w) \quad (9)$$

Pero lo que debemos tener es del miembro izquierdo para

$$jAP_{2B}(w) \quad y \quad jAT_{2B}(w)$$

Nuevamente, usando lo dicho sobre el manejo de las constantes de (8) y (9) pasamos a:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{at}{2}\right) \longleftrightarrow P_a(w) \\ \frac{b}{2\pi} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{bt}{2}\right) \longleftrightarrow T_{2b}(w) \end{array}\right\}$$

Coloquialmente, las ctes. multiplicando en un dominio se pueden pasar dividiendo al otro

y finalmente a:

$$\frac{jAa}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{at}{2}\right) \longleftrightarrow jAP_a(w)$$

$$\frac{jAb}{2\pi} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{bt}{2}\right) \longleftrightarrow jAT_{2b}(w)$$

Finalmente en nuestro caso $P_a(w) = P_{2B}(w) \Rightarrow a = 2B$

y $T_{2b}(w) = T_{2B}(w) \Rightarrow b = B$

con lo que:

$$\frac{j A \cancel{2} B}{\cancel{2}\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\cancel{2}Bt}{\cancel{2}}\right) \longleftrightarrow j A P_{2B}(w)$$

$$\frac{j A B}{2\pi} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{Bt}{2}\right) \longleftrightarrow j A T_{2B}(w)$$

$$\boxed{y\ f(t) = \frac{jAB}{\pi} \operatorname{sinc}(Bt) - \frac{jAB}{2\pi} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{Bt}{2}\right)}$$

Es importante ver que aunque no se nos ocurra expresar a $|F(w)| = |F_1(w)| - |F_2(w)|$, el ejercicio puede resolverse con un grado de dificultad similar en algunos casos.

Nuevamente recordemos que $F(w) = |F(w)| e^{j\theta(w)}$; como vimos $\theta(w) = \frac{\pi}{2}$ (para todo $w$)

$$= F(w) = |F(w)| e^{j\pi/2} = |F(w)| \left(\cos\frac{\pi}{2} + j \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = j|F(w)|$$

Ahora tenemos dos posibilidades:

1) Llevar $j|F(w)|$ a una forma tal que podamos usar la tabla

2) Antitransformar por definición

1) Si decidimos llevarlo a una forma podemos pasar que

$$|F(w)| = -Aw \cdot P_B\left(w + \frac{B}{2}\right) + Aw\, P_B\left(w - \frac{B}{2}\right) \Rightarrow F(w) = \overbrace{-jAw\, P_B\left(w + \frac{B}{2}\right)}^{A} \overbrace{+ jAw\, P_B\left(w - \frac{B}{2}\right)}^{B}$$

Para resolver esto, nuevamente deberemos aplicar varias propiedades de la tabla, incluyendo dualidad, desplazamiento en frecuencia y derivada en el tiempo

Consideremos para simplificar sólo la antitransformada de A:

Veamos:

Para antitransformar $-jA\omega P_B(\omega+\frac{B}{2})$ debemos realizarlo por pasos

a) Buscar la antitransformada de $P_B(\omega)$

b) " " " " $P_B(\omega+\frac{B}{2})$

c) " " " " $j\omega P_B(\omega+\frac{B}{2})$

d) " " " " $-Aj\omega P_B(\omega+\frac{B}{2})$

Para calcular a) debemos usar dualidad de $P_a(t) \longleftrightarrow a\,\text{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right)$ que es

$$a\,\text{sinc}\left(\frac{at}{2}\right) \longleftrightarrow 2\pi P_a(\omega)$$

que llevamos a:

$$\frac{a}{2\pi}\text{sinc}\left(\frac{at}{2}\right) \longleftrightarrow P_a(\omega)\,, \quad \text{como } a=B \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{P_B(\omega)\} = \frac{B}{2\pi}\text{sinc}\left(\frac{Bt}{2}\right)$$

Para calcular b) usamos:

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \longleftrightarrow F(\omega-\omega_0) \Rightarrow \text{como } \omega_0 = -\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{P_B(\omega+\frac{B}{2})\} = e^{-j\frac{B}{2}t}\frac{B}{2\pi}\text{sinc}\left(\frac{Bt}{2}\right)$$

Para calcular c) usamos:

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \quad \text{con } n=1 \Rightarrow$$

$$f'(t) \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{j\omega P_B(\omega+\frac{B}{2})\} = \frac{d}{dt}\left[e^{-j\frac{B}{2}t}\frac{B}{2\pi}\text{sinc}\left(\frac{Bt}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[e^{-j\frac{B}{2}t}\frac{B}{2\pi}\frac{\text{sen}\left(\frac{Bt}{2}\right)}{\frac{Bt}{2}}\right] = \frac{d}{dt}\left[e^{-j\frac{B}{2}t}\cdot\frac{\cancel{B}}{2\pi}\left(\frac{e^{j\frac{B}{2}t}-e^{-j\frac{B}{2}t}}{\cancel{2}j\frac{\cancel{B}t}{\cancel{2}}}\right)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\pi j t}\left(1-e^{-jBt}\right)\right] = \frac{j}{2\pi t^2}\left(1-e^{-jBt}\right) + \frac{B}{2\pi t} e^{-jBt}$$

Luego para calcular d) simplemente multiplicamos por $-A$:

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{A\} = \frac{-Aj}{2\pi t^2}\left(1-e^{-jBt}\right) - \frac{AB}{2\pi t^2} e^{-jBt}$$

$-jA\omega P_B(\omega+\frac{B}{2})$ $\qquad$ $jA\omega P_B(\omega-\frac{B}{2})$

De modo análogo se calcula el término de la antitransformada de $B$

2) Si en cambio antitransformamos por definición, es decir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

sabiendo que $F(\omega) = j|F(\omega)| = \begin{cases} 0, & \omega < -B \\ -\frac{jA}{B}\omega, & -B < \omega < 0 \\ \frac{jA}{B}\omega, & 0 < \omega < B \\ 0, & \omega > B \end{cases}$

Resulta que:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-B} \cancel{0 . e^{j\omega t}}^{\,0} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{0} -\frac{jA}{B}\omega e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{B} \frac{jA}{B}\omega e^{j\omega t} d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\infty} \cancel{0 . e^{j\omega t}}^{\,0} d\omega = \frac{jA}{2\pi B t^2}\left(-1+j\omega t\right)e^{j\omega t}\Big|_{-B}^{0} +$$

$$+ \frac{jA}{2\pi B t^2}\left(1-j\omega t\right)e^{j\omega t}\Big|_{0}^{B} = \frac{jA}{2\pi B t^2}\left(-2 + e^{-jBt} + e^{jBt} + jBte^{-jBt} - jBte^{jBt}\right)$$

Como se ve, realizar el cálculo por definición puede en algunos casos simplificar el desarrollo si bien se obtiene un resultado poco compacto que podría trabajarse para llevar a una forma como la hallada usando tablas.