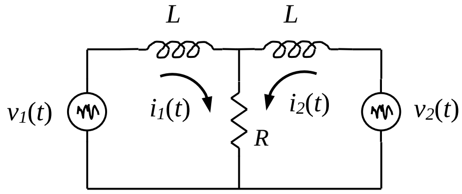
Dado el siguiente circuito, que se representa mediante el sistema de ecuaciones diferenciales mostrado, aplique la transformada de Laplace para encontrar la tensión en la resistencia R, $v_r(t)$, en función de las tensiones genéricas causales $v_1(t)$ y $v_2(2)$.



$$\begin{cases} v_1(t) = L\, i_1' + (i_1 + i_2)R \\ v_2(t) = L\, i_2' + (i_1 + i_2)R \end{cases} \qquad i_1(0) = i_2(0) = 0$$

Vamos a aplicar transformada de Laplace a cada una de las dos ecuaciones anteriores:

$$\begin{cases} V_1(s) = L\big(sI_1(s) - i_1(0)\big) + \big(I_1(s) + I_2(s)\big)R \\ V_2(s) = L\big(sI_2(s) - i_2(0)\big) + \big(I_1(s) + I_2(s)\big)R \end{cases}$$

Como queremos hallar $v_r(\mathrm{t}) = L^{-1}\{V_{\mathrm{R}}(\mathrm{s})\}$ y $V_{\mathrm{R}}(\mathrm{s}) = \big(I_1(s) + I_2(s)\big)R$, despejamos del sistema anterior $I_1(s) + I_2(s)$, teniendo en cuenta además que según las condiciones iniciales dadas es $i_1(0) = i_2(0) = 0$. Para hacerlo sumamos ambas ecuaciones:

$$V_1(s) + V_2(s) = Ls\big(I_1(s) + I_2(s)\big) + 2\big(I_1(s) + I_2(s)\big)R$$
$$V_1(s) + V_2(s) = (Ls + 2R)\big(I_1(s) + I_2(s)\big)$$
$$I_1(s) + I_2(s) = \frac{V_1(s) + V_2(s)}{(Ls + 2R)}$$

Y por lo tanto

$$V_R(s) = \frac{V_1(s) + V_2(s)}{(Ls + 2R)}.R$$

Reescribimos esta ecuación para poder antitransformar usando la tabla.

$$V_R(s) = \frac{R}{(Ls + 2R)}.(V_1(s) + V_2(s))$$

Vemos en la tabla que:

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(v)g(v - t)dv$$

Si llamamos $F(s) = (V_1(s) + V_2(s))$ y $G(s) = \frac{R}{(Ls+2R)} = \frac{R/L}{s+2R/L}$

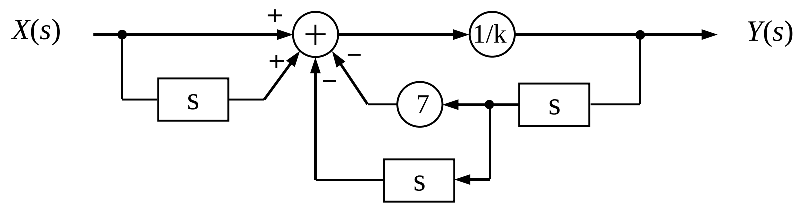
Nos queda $g(t) = L^{-1}\left\{\frac{R/L}{s+2R/L}\right\} = \frac{R}{L}e^{-2\frac{R}{L}t}$ y $f(t) = L^{-1}\{V_1(s) + V_2(s)\} = v_1(t) + v_2(t)$

Por lo tanto:

$$v_r(t) = \int_0^t f(v)g(v - t)dv = \int_0^t \big(v_1(v) + v_2(v)\big).\frac{R}{L}e^{-2\frac{R}{L}(t-v)}dv =$$

$$v_r(t) = \frac{R}{L}e^{-2\frac{R}{L}t}\int_0^t \big(v_1(v) + v_2(v)\big).e^{2\frac{R}{L}v}dv$$

Dado el siguiente sistema:



a) Encuentre los valores de k para los cuales el sistema es estable.

Luego, suponiendo que k = 10:

b) Halle la respuesta al impulso.

c) Obtenga la ecuación diferencial que modela al sistema.

d) Calcule $y(t)$ cuando $x(t) = 2e^{-4t}\,u_s(t)$ sabiendo que $y(0) = 2$ $y'(0) = -4$. Distinga la solución libre de la solución forzada.

e) Muestre que la solución forzada tiene valor inicial nulo (se calcula con condiciones iniciales nulas).

a) Del diagrama en bloques podemos deducir que la salida del sumador es $k.Y(s)$
Y las señales que ingresan al mismo son $X(s)$, $sX(s)$, $s^2Y(s)$, $7sY(s)$.
Por lo tanto la ecuación del sumador es:

$$k.Y(s) = X(s) + sX(s) - s^2Y(s) - 7sY(s)$$

Agrupando términos

$$Y(s)\ (\ s^2 + 7s + k\ ) = X(s)\ (1 + s)$$

De donde:

$$H(s) = \frac{1+s}{s^2+7s+k}$$

Para que el sistema sea estable los polos de H(s) deben tener parte real negativa.
Utilizamos la fórmula resolvente para calcular los polos de H(s):

$$s = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4k}}{2}$$

Para que el sistema sea estable los polos pueden ser ambos reales negativos, lo cual sucede si el radicando es mayor o igual que cero y el resultado de la raíz menor que 7, o no reales con parte real negativa, lo cual sucede si el radicando es negativo, ya que en ese caso la parte real será -7/2. Por lo tanto:

$$7^2 - 4k \geq 0 \ \ y \ \ \sqrt{7^2-4k} < 7 \qquad \text{ó} \qquad 7^2 - 4k < 0$$
$$k \leq \frac{49}{4} \ \ y \ \ k > 0 \qquad \text{ó} \qquad k > \frac{49}{4}$$

De ambas condiciones se deduce que el sistema es estable si $k > 0$.

b) Para k = 10 queda:

$$H(s) = \frac{1+s}{s^2+7s+10}$$

h(t) = L^{-1}{H(s)}

Un método para antitransformar H(s) es separarla en fracciones simples. Las raíces del denominador de H(s) son -2 y -5. Por lo tanto:

$$H(s) = \frac{1+s}{(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+5} = \frac{A(s+5)+B(s+2)}{(s+2)(s+5)}$$

De donde $A\,(s + 5) + B\,(s + 5) = s + 1$ y es $A = -1/3$ y $B = 4/3$

Reemplazando en la expresión de H(s)

$$H(s) = \frac{-1/3}{s+2} + \frac{4/3}{s+5}$$

En la tabla vemos que $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$ por lo tanto:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s+2} + \frac{4/3}{s+5}\right\} = \left(-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-5t}\right).u_s(t)$$

Donde hemos agregado $u_s(t)$ por la condición de causalidad de la transformada de Laplace.

c) A partir de la expresión $H(s) = Y(s) / X(s)$ es posible encontrar la ecuación diferencial.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1+s}{s^2+7s+10} \rightarrow (s^2+7s+10)Y(s) = (s+1)X(s) \rightarrow$$
$$\rightarrow s^2Y(s) + 7sY(s) + 10Y(s) = sX(s) + X(s)$$

Antitransformando miembro a miembro y teniendo en cuenta que $H(s)$ se calcula con condiciones iniciales nulas, nos queda:

$$y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = x'(t) + x(t)$$

d) Existen muchas formas diferentes para hallar y(t) para una x(t) y condiciones iniciales dadas.

Vamos a hacerlo en esta oportunidad usando transformada de Laplace en la ecuación diferencial obtenida anteriormente.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 7\big(sY(s) - y(0)\big) + 10Y(s) = sX(s) - x(0) + X(s)$$

En nuestro caso es $y(0) = 2$ $y'(0) = -4$, $X(s) = L\{2.e^{-4t}\} = 2 / (s + 4)$ y $x(0) = 2$

$$s^2Y(s) - 2s + 4 + 7(sY(s) - 2) + 10Y(s) = sX(s) - 2 + X(s)$$

$$(s^2 + 7s + 10)Y(s) - 2s - 10 = (s + 1)X(s) - 2$$

$$(s^2 + 7s + 10)Y(s) = (s + 1)X(s) + 2s + 10 - 2$$

$$Y(s) = \frac{(s + 1)X(s)}{s^2 + 7s + 10} - \frac{2}{s^2 + 7s + 10} + \frac{2s + 10}{s^2 + 7s + 10}$$

Los dos primeros términos de esta expresión dependen de la entrada y su antitransformada nos dará la respuesta forzada (respuesta a la entrada con condiciones iniciales nulas), mientras que el segundo depende sólo de las condiciones iniciales y su antitransformada no dará la respuesta libre del sistema (respuesta a las condiciones iniciales).
Antes de antitransformar reemplazamos $X(s)$ y factorizamos los denominadores en la expresión de $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2(s + 1)}{(s + 2)(s + 5)(s + 4)} - \frac{2}{(s + 2)(s + 5)} + \frac{2s + 10}{(s + 2)(s + 5)}$$

Antitransformamos cada término separando en fracciones simples:

$$y_f = L^{-1}\left\{\frac{2(s + 1) - 2(s + 4)}{(s + 2)(s + 5)(s + 4)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 5} + \frac{C}{s + 4}\right\}$$
$$= L^{-1}\left\{\frac{-1}{s + 2} + \frac{-2}{s + 5} + \frac{3}{s + 4}\right\} = (-e^{-2t} - 2e^{-5t} + 3e^{-4t}).u_s(t)$$

$$y_l = L^{-1}\left\{\frac{2s + 10}{(s + 2)(s + 5)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s + 2}\right\} = 2e^{-2t} \quad t > 0$$

La solución total es $y(t) = (e^{-2t} - 2e^{-5t} + 3e^{-4t}).u_s(t)$

e) $y_f(0) = -e^0 - 2e^0 + 3e^0 = 0,\ y_f'^{(0)} = 2e^0 + 10e^0 - 12e^0 = 0$