Diferencias divididas (Interpolación de Newton)

by Rodrigo Russo

Partiendo de n puntos (x, y), podemos obtener un polinomio de grado $n-1$. El método que se utilizará es el de las diferencias divididas para obtener los coeficientes, el cual facilita la tarea de resolver un sistema de ecuaciones usando el cociente de sumas y restas.

Dada una colección de n puntos de x y sus imágenes $f(x)$, se pueden calcular los coeficientes del polinomio interpolante utilizando las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
f[x_k] &= f(x_k) && k \in [0, n] \\
f[x_k, x_{k+1}] &= \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k} && k \in [0, n-1] \\
f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] &= \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} && k \in [0, n-2] \\
&\dots \\
f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}] &= \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+i}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k} && k \in [0, n-i]
\end{aligned}
$$

Finalmente, a partir de los valores obtenidos, se pueden obtener dos formas de representar el polinomio:

- **Progresivo (desde 0 hasta $n-1$):**

$$
\begin{aligned}
P_{n-1}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \\
+ \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

- **Regresivo (desde n hasta 1):**

$$
\begin{aligned}
P_{n-1}(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}] \cdot (x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) + \\
+ \dots + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Dados los puntos (1,2), (3,3), (4,2) y (8,10), se quiere obtener el polinomio interpolante que pasa por ellos. Hallar, por medio de las diferencias divididas, el polinomio progresivo y regresivo.

Al tener cuatro puntos, sabemos que el grado del polinomio interpolante será tres. Por lo tanto, necesitaremos de cuatro coeficientes para tener nuestro polinomio definido. Aplicando los pasos de las diferencias divididas:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
1	$f[1] = 2$	$f[1,3] = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$	$f[1,3,4] = \frac{-1-\frac{1}{2}}{4-1} = -\frac{1}{2}$	$f[1,3,4,8] = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}}{8-1} = \frac{11}{70}$
3	$f[3] = 3$	$f[3,4] = \frac{2-3}{4-3} = -1$	$f[3,4,8] = \frac{2+1}{8-3} = \frac{3}{5}$	
4	$f[4] = 2$	$f[4,8] = \frac{10-2}{8-4} = 2$		
8	$f[8] = 10$			

De esta manera, podemos ver que los valores de la primer fila serán los coeficientes obtenidos de forma progresiva y, si tomamos los últimos de cada columna, tendremos los coeficientes obtenidos de forma regresiva.

Sin embargo, a medida que aumenta la cantidad de puntos, el método puede volverse confuso debido a la cantidad de diferencias a obtener. Por lo tanto, aprovechando la forma en la que se disponen los coeficientes y por la forma de realizar las operaciones, se emplea una tabla más simple para seguir visualmente. Consiste en escribir los puntos x e y en las dos primer columnas; luego, se realizan las diferencias de la columna de diferencias anterior y los valores de x correspondientes. Dada la forma que tiene la tabla, se denomina método piramidal.

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
1	2			
		$\frac{1}{2}$		
3	3		$-\frac{1}{2}$	
		-1		$\frac{11}{70}$
4	2		$\frac{3}{5}$	
		2		
8	10			

Se puede ver fácilmente qué cálculo hacer para obtener el siguiente elemento. Cada uno es la resta entre los valores que están en la columna anterior que están por encima y debajo de la diferencia en cuestión de forma tal que el valor obtenido queda en el medio de ambos valores. Luego, se divide por la diferencia entre dos valores de x que se obtienen siguiendo la diagonal desde la diferencia actual, hasta primer diferencia ($f[x_k]$), hacia arriba y hacia abajo. Finalmente, se resta el inferior con el superior.

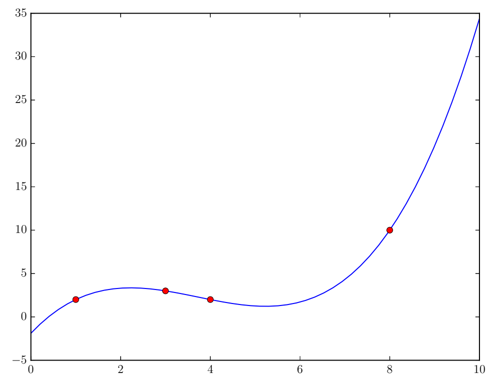
Volviendo al ejemplo, si tomamos la diagonal superior de la última tabla, obtendremos los coeficientes del polinomio progresivo; si lo tomamos por la diagonal inferior, obtendremos al polinomio regresivo.

$$
\begin{aligned}
P_3(x)^{\text{progresivo}} &= 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)(x-3) + \frac{11}{70}(x-1)(x-3)(x-4) = \\
&= \frac{11}{70}x^3 - \frac{123}{70}x^2 + \frac{192}{35}x - \frac{66}{55}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_3(x)^{\text{regresivo}} &= 10 + 2(x-8) - \frac{3}{5}(x-8)(x-4) + \frac{11}{70}(x-8)(x-4)(x-3) = \\
&= \frac{11}{70}x^3 - \frac{123}{70}x^2 + \frac{192}{35}x - \frac{66}{55}
\end{aligned}
$$

Ambos polinomios resultan ser iguales. Esto es lógico pues estamos buscando el polinomio de grado tres que pasa por cuatro puntos. Dado que, si planteáramos un sistema de ecuaciones, tendríamos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, ésta debe ser la única posible solución.

Resta verificar que, efectivamente, el polinomio pase por los puntos. A continuación se muestra la gráfica del polinomio junto con los puntos por los que debía pasar:


35
30
25
20
15
10
5
0
−5
0
2
4
6
8
10