Aproximación funcional e Interpolación

Representación mediante funciones analíticas sencillas de:

- Información discreta. (Resultante de muestreos).
- Funciones complejas. (Siendo $y_k = f(x_k)$ una cierta función de la que no se conoce una fórmula explícita, o bien es muy complicada para evaluarla, derivarla, integrarla, hallarle ceros, etc.)

Si la información se representa mediante un polinomio $p_n(x)$ en un intervalo dado, nos referimos a:

Aproximación polinomial e Interpolación polinomial.

Aproximación de una función por polinomios de Taylor

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- La precisión aumenta cuando aumentan la cantidad de términos (n),
- Necesidad de conocer f y las n derivadas de f en x_0.
- La aproximación es mejor en valores cercanos a x_0.
- Necesidad de restringir el valor $|x-x_0|$.

Interpolación

Dados n +1 puntos en $\mathbf{R}^2$: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, con $y_i = f(x_i)$ (siendo $f(x)$ no necesariamente conocida) en los cuales $x_o,x_1,\ldots,x_n$ son números distintos que se distribuyen en el intervalo $[x_o,x_n]$.
se quiere encontrar un polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que n tal que:

$$p_n(x_k)=y_k,\ k=0,1,\ldots,n$$

Si para estimar un valor y, se emplea el polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que n que pasa por los puntos dados, la aproximación se denomina **interpolación polinomial** (**lineal,** cuando sólo se emplean dos puntos) y a $p_n(x)$ se lo denomina **polinomio de interpolación ó polinomio interpolante.**

Si $x_0 < \boldsymbol{x} < x_n \Rightarrow$ $\boldsymbol{y}$ será un **valor interpolado**,
Si $\boldsymbol{x} < x_0$ ó $\boldsymbol{x} > x_n \Rightarrow \boldsymbol{y}$ será un **valor extrapolado.**

Existencia del polinomio

Si en los n +1 puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,x_n)$, los valores $x_o,x_1,\ldots,x_n$ son números distintos, existe un ***único*** polinomio

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

de grado menor o igual que ***n*** tal que $p_n(x_k) = y_k$, con $k = 0,1,2,\ldots,n$
$\Rightarrow$ existen números reales únicos $a_0, a_1, a_2,\ldots,a_n$ tales que:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

Polinomio único

El sistema anterior, de $n+1$ ecuaciones lineales en las $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, escrito en forma matricial es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots & x_n^n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{b}$$

Si $\det(A) \neq 0$ el sistema tiene solución única.

Determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{bmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 \\ 0 & 1 & x_2 + x_0 \end{bmatrix} =$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

En general $\boxed{\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)}$

Si $x_i \neq x_j$ entonces $\det(A) \neq 0$, y por tanto el sistema en consideración tiene solución única.

Por lo general, la matriz de coeficientes de este sistema resulta mal condicionada si dos abscisas están relativamente cerca.

Forma de Lagrange del polinomio interpolante

En interpolación lineal, la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), posee una pendiente $m=(y_1-y_0)/(x_1-x_0)$, siendo la ecuación de la recta $y=m(x-x_0)+y_0$

remplazando m: $y = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 = p(x) = y_0 + (y_1 - y_0)\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Evaluando $p(x)$ en x_0 y en x_1: $y_0 = y_0 + (y_1 - y_0)*0 = p(x_0)$

$y_1 = y_0 + (y_1 - y_0)*1 = p(x_1)$

Lagrange propone un polinomio equivalente:

$$y = y_0 \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{L_{1,0}} + y_1 \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{L_{1,1}} = p_1(x)$$

Coeficientes de Lagrange $L_{1,0}(x_0)=1$, $L_{1,0}(x_1)=0$
$L_{1,1}(x_0)=0$, $L_{1,1}(x_1)=1$

$$p_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Los polinomios L_0, L_1, L_2, se denominan **Polinomios fundamentales de Lagrange**

El polinomio $p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$ se denomina **Polinomio de interpolación de Lagrange** o **Forma de Lagrange del polinomio interpolante** para los datos dados.

En general

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}, \text{ con } i=0,1,\ldots,n$$

Para n +1 puntos, los polinomios fundamentales de Lagrange (L_i) son de grado n.

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases} \qquad \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1 \text{ para cada } x_k$$

$$E(x) = f(x) - p_n(x) \approx \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

donde $\xi(x)$ es un número que depende de x, y $\xi(x) \in [x_0, x_n]$

Ejemplo 1

Aproximar la función ***f(x) = cos(x)*** en el intervalo **[-π/2, π/2]** mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado dos.

$\Rightarrow$ $x_0 = -\pi/2$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$

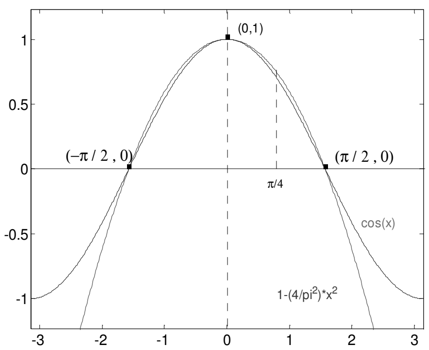
$$f(x_0) = y_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(x_1) = y_1 = \cos(0) = 1, \quad f(x_2) = y_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}{-\frac{\pi^2}{4}} = 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2$$

$$\boxed{p_2(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2}$$

Resultados



$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx .7071$$

$$p_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = .75$$

$$E\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|f\left(\frac{\pi}{4}\right) - p_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = |0.7071 - 0.75| = 0.0429$$

Cota de Error

$$E(x) = \left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} f'''(\xi(x))\right| = \left|\frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{6} f'''(\xi(x))\right|$$

$$f(x) = \cos(x), \quad f'(x) = -\operatorname{sen}(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f'''(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$|f'''(\xi(x))| = |\operatorname{sen}(\xi(x))| \leq 1 \text{ para toda } \xi(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E(x) \leq \frac{1}{6}\left|x\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\right| \text{ para todo } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{para } x = \frac{\pi}{4}, \quad \left|E\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{6}\left|\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{16}^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\right| = \frac{\pi}{24}\left(\frac{3\pi^2}{16}\right) = \frac{\pi^3}{128} = .242$$

$$\text{Error real} = 0.0429$$

Ejercicio 2

Use los polinomios interpolantes de Lagrange de grados uno, dos y tres, **más apropiados**, para aproximar f(2.5).

Si f(2.0) = .5103757, f(2.2) = .5207843, f(2.4) = .5104147,

f(2.6) = .4813306 y f(2.8) = .4359160.

El polinomio de interpolación de Lagrange de grado uno, más apropiado, es el que se obtiene tomando los nodos $x_0 = 2.4$ y $x_1 = 2.6$

$$p_1(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(2.5) = 0.4958727 \approx f(2.5)$$

Para $p_2(x)$, hay dos polinomios apropiados,
el que pasa por los nodos x_0=2.2, x_1=2.4, x_2=2.6 y
el que pasa por los nodos x_0=2.4, x_1=2.6, x_2=2.8

Ej. Polinomio interpolante de Lagrange

$_0$ (2.0 , 0.5103757)
$_1$ (2.2 , 0.5207843)
$_2$ (2.4 , 0.5104147)
$_3$ (2.6 , 0.4813306)
$_4$ (2.8 , 0.4359160)

$$p_1(x) = y_2L_2(x) + y_3L_3(x) = y_2\frac{x - x_3}{x_2 - x_3} + y_3\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$
$$= 0.5104147\frac{x - 2.6}{2.4 - 2.6} + 0.4813306\frac{x - 2.4}{2.6 - 2.4} =$$
$$= 0.859421 - 0.145420\cdot x$$

$$p_4(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} +$$
$$+ y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} +$$
$$+ y_4\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

Polinomio interpolante de Newton

El polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que **n** que interpola a f en los datos dados, puede expresarse en la forma

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Para determinar los coeficientes $b_0, b_1, ..., b_n$

Si $p_n(x_k) = y_k = f(x_k), \quad k = 0,1,\cdots,n$

$$p_n(x_0) = b_0 = f(x_0) \quad \Rightarrow \quad b_0 = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$p_n(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Diferencia dividida hacia adelante (progresiva) de Newton.

a) La diferencia dividida cero de f **con respecto a** x_k es

$$f[x_k] = f(x_k), \quad k = 0,1,\cdots,n$$

b) La diferencia dividida uno de f **con respecto a** x_k y x_{k+1} es

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = 0,1,\cdots,n-1$$

c) La diferencia dividida dos de f **con respecto a** x_k, x_{k+1} y x_{k+2} es

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = 0,1,\cdots,n-2$$

d) En general, se definen las *n-i+1* **diferencias divididas** i **(progresivas) de** f **con respecto a** $x_k, x_{k+1},\ldots, x_{k+i}$ como:

$$f[x_k, x_{k+1},\cdots, x_{k+i}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2},\cdots, x_{k+i}] - f[x_k, x_{k+1},\cdots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k}, \quad k = 0,1,\cdots, n-i$$

y el **polinomio interpolante** es de la forma:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ f[x_0, x_1,\cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Fórmula de diferencia dividida (regresiva)

El **polinomio interpolante de Newton** es de la forma:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots \\ &+ f[x_0, x_1,\cdots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1) \end{aligned}$$

Estimación del error para el polinomio interpolante de Newton

Se puede demostrar que si existe una función *f* definida sobre el intervalo $[x_0, x_n]$, ***n*** veces diferenciable, entonces existe $\xi \in [x_0, x_n]$ tal que:

$$f[x_0, x_1,\cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Considerando la fórmula del error de Lagrange

$$E(x) = f(x) - p_n(x) \approx \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

donde $\xi(x)$ es un número que depende de *x*, y $\xi(x) \in [x_0, x_n]$

usando la forma de Newton del polinomio interpolante de grado menor o igual que n + 1 para *f* en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, *x* , tenemos que

$$E(x) = f(x) - p_n(x) \approx f[x_0, x_1, \ldots x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Esquema de cálculo

k	x_k	Dif. div. 0 $f[x_k]=f(x_k)=y_k$	Dif. div. 1 $f[x_k,x_{k+1}]$	Dif. div. 2 $f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	...	Dif. div. n $f[x_0,\ldots,x_n]$
0	x_0	$f[x_0] = b_0$				
			$f[x_0,x_1] = b_1$			
1	x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = b_2$		
			$f[x_1,x_2]$		...	
2	x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$		
			$f[x_2,x_3]$			$f[x_0,\ldots,x_n] = b_n$
3	X_3	$f[x_3]$		...		
...	...	...	...		...	
n-1	X_{n-1}	$f[x_{n-1}]$		$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$		
			$f[x_{n-1},x_n]$			
n	x_n	$f[x_n]$				

x_k	$f(x)=f[x_k]$	Dif. Div. 1	Dif. Div. 2	Dif. Div. 3	Dif. Div. 4
2.0	0.5103757				
		.052043			
2.2	0.5207843		-.2597275		
		-.051848		.04299367	
2.4	0.5104147		-.2339313		.008341125
		-.1454205		.04966667	
2.6	0.4813306		-.2041313		
		-.227073			
2.8	0.4359160				

Aproximaciones progresivas

$p_1(x) = f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0) = 0.5103757+.052043(x-2.0) \Rightarrow f(2.1) = .51558$

$p_2(x) = p_1(x)+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) = p_1(x) -.2597275 (x-2.0)(x-2.2)$

$p_3(x) = p_2(x)+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) =$

$= p_2(x)+ .04299367 (x-2.0)(x-2.2)(x-2.4)$

$p_4(x) = p_3(x)+ .008341125 (x-2.0)(x-2.2)(x-2.4)(x-2.6)$

Aproximaciones regresivas

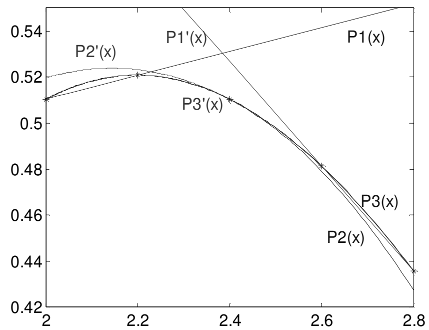
$p_1'(x) = f[x_n]+f[x_n,x_{n-1}](x-x_n) = 0.4359160 -.227073\ (x-2.8)$

$p_2'(x) = p_1(x)+ f[x_n,x_{n-1},x_{n-2}](x-x_0)(x-x_{n-1}) = p_1(x) -.2041313(x-2.8)(x-2.6)$

$p_3'(x) = p_2(x)+ f[x_0,x_{n-1},x_{n-2},x_{n-3}](x-x_0)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) =$

$= p_2(x)+ .04966667(x-2.8)(x-2.6)(x-2.4)$

$p_4'(x) = p_3(x)+ .008341125\ (x-2.8)(x-2.6)(x-2.4)(x-2.2)$



Ej. Polinomios interpolantes de Newton

Aproximaciones progresivas

$p_1(x) = 0.5103757+0.052043(x-2.0) = 0.0520429\cdot x + 0.406289$

$p_2(x) = p_1(x) -0.2597275\ (x-2.0)(x-2.2)$

$= 0.5103757+0.052043(x-2.0) -0.2597275\ (x-2.0)(x-2.2) =$

$= 0.0520429\cdot x + 0.406289 - 0.259727\cdot x^2 + 1.09085\cdot x - 1.14279 =$

$= - 0.259727\cdot x^2 + 1.14289\cdot x - 0.736500$

$p_3(x) = p_2(x)+ .04299367\ (x-2.0)(x-2.2)(x-2.4) =$

$= 0.5103757+.052043(x-2.0) -0.2597275\ (x-2.0)(x-2.2) +$

$+ 0.04299367\ (x-2.0)(x-2.2)(x-2.4) =$

$= 0.0429935\cdot x^3 - 0.543484\cdot x^2 + 1.76544\cdot x - 1.19052$

$p_4(x) = p_3(x)+ 0.008341125\ (x-2.0)(x-2.2)(x-2.4)(x-2.6) =$

$= 0.5103757+0.052043(x-2.0) -.2597275\ (x-2.0)(x-2.2) +$

$+ 0.04299367\ (x-2.0)(x-2.2)(x-2.4) +$

$+ 0.008341125\ (x-2.0)(x-2.2)(x-2.4)(x-2.6) =$

$= 0.00834111\cdot x^4 - 0.0337447\cdot x^3 - 0.279571\cdot x^2 + 1.36333\cdot x - 0.961508$

Interpolación por segmentos

Cuando **n** aumenta el polinomio interpolante $p_n(x)$ tiene más oscilaciones y puede no aproximar bien a la función f.

Esto sugiere que se intente la interpolación localmente, es decir, por sub-intervalos.

Este proceso de aproximación sobre sub-intervalos se conoce como **interpolación segmentaria** o **por segmentos**.

- **interpolación segmentaria lineal**
- **interpolación segmentaria cuadrática**
- **interpolación segmentaria cúbica** (la más utilizada).

$$p_3^{(k)}(x) \equiv p_k(x) = a_k + b_k(x-x_k) + c_k(x-x_k)^2 + d_k(x-x_k)^3$$

con $k = 0,1,\ldots,n-1$

Son **n** polinomios de grado menor o igual que tres y cada uno con cuatro coeficientes incógnitas, así que tenemos un total de 4n **incógnitas** por determinar (a_k,b_k,c_k,d_k).

Interpolación segmentaria cúbica (cubic splines)

Las condiciones que deben satisfacer tales polinomios son:

$$i)\quad \begin{cases} p_k(x_k) = f(x_k), \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \\ p_{n-1}(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

Condiciones de interpolación. (n +1 ecuaciones)

$$ii)\quad p_k(x_{k+1}) = p_{k+1}(x_{k+1}), \quad k = 0,1,\ldots,n-2$$

Condiciones de continuidad en los nodos interiores. (n -1 ecuaciones)

$$iii)\quad p'_k(x_{k+1}) = p'_{k+1}(x_{k+1}), \quad k = 0,1,\ldots,n-2$$

Condiciones de derivabilidad en los nodos interiores. (n -1 ecuaciones)

$$iv)\quad p''_k(x_{k+1}) = p''_{k+1}(x_{k+1}), \quad k = 0,1,\ldots,n-2$$

Condiciones de continuidad de la primera derivada en los nodos interiores: se conserva la concavidad en la vecindad del nodo interior, a no ser que la segunda derivada sea cero en el nodo interior. (n -1 ecuaciones).

- Hasta aquí tenemos n + 1 + 3(n-1) = 4n-2 condiciones.

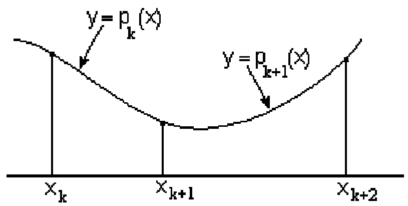
Se satisface uno de los siguientes pares de **condiciones de frontera**:

$$v)\quad a)\quad p''_0(x_0) = 0 \quad y \quad p''_{k+1}(x_{k+1}) = 0 \qquad b)\quad p'_0(x_0) = f'(x_0) \quad y \quad p'_{n-1}(x_n) = f'(x_n)$$

Trazador cúbico

Dados n puntos $[x_0,x_n]$, un **trazador cúbico** es un conjunto de n polinomios cúbicos $p_k(x)$, cada uno definido en el intervalo $[x_k,x_{k+1}]$.

$T(x) = p_k(x)$ para $x\in[x_k,x_{k+1}]$ y $p_k(x)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ cumple las condiciones i) a v)**.** Si el **Trazador cúbico** satisface las condiciones **v**),**a**), se llama **natural**, y si satisface las condiciones **v**), **b)** se llama **de frontera sujeta**.



Si $p_3^{(k)}(x)\equiv p_k(x)=a_k+b_k(x-x_k)+c_k(x-x_k)^2+d_k(x-x_k)^3,\ k=0,1,\ldots,n-1$

Por i) $p_k(x_k)=f(x_k)=a_k \quad , \quad k=0,1,\ldots,n-1$ y $p_{n-1}(x_n)=f(x_n)$

Por ii) $p_k(x_{k+1})=p_{k+1}(x_{k+1})\Rightarrow$

$$a_k+b_k(x_{k+1}-x_k)+c_k(x_{k+1}-x_k)^2+d_k(x_{k+1}-x_k)^3=a_{k+1}$$

si $h_k=x_{k+1}-x_k \Rightarrow \boxed{a_k+b_kh_k+c_kh_k^2+d_kh_k^3=a_{k+1}}$ (1)

Por iii) $p'_k(x_{k+1})=p'_{k+1}(x_{k+1})\Rightarrow \boxed{b_k+2c_kh_k+3d_kh_k^2=b_{k+1}}$ (2)

Por iv) $p''_k(x_{k+1})=p''_{k+1}(x_{k+1})=\boxed{2c_k+6d_kh_k=2c_{k+1}}$ (3)

$$\Rightarrow c_{k+1}=c_k+3d_kh_k \Rightarrow \boxed{d_k=\frac{c_{k+1}-c_k}{3h_k}} \quad (4)$$

Reemplazando (4) **en** (1) **y despejando $b_k\Rightarrow$** $\boxed{b_k=\frac{a_{k+1}-a_k}{h_k}-\frac{h_k}{3}(2c_k+c_{k+1})}$ (5)

Reemplazando los b_k y b_{k+1} en (2) $\Rightarrow$

$$\boxed{h_kc_k+2(h_k+h_{k+1})c_{k+1}+h_{k+1}c_{k+2}=\frac{3}{h_{k+1}}(a_{k+2}-a_{k+1})-\frac{3}{h_k}(a_{k+1}-a_k)} \quad (6)$$

Por (6) $h_kc_k+2(h_k+h_{k+1})c_{k+1}+h_{k+1}c_{k+2}=\dfrac{3}{h_{k+1}}(a_{k+2}-a_{k-1})-\dfrac{3}{h_k}(a_{k+1}-a_k)$

Remplazando en cada punto se determina un sistema de ecuaciones AX=B, con:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & & 0 \\ 0 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2-a_1)-\frac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1})-\frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1}-a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

k	x_k	$f(X_k)=3xe^x-2e^x$	$h_k=x_{k+1}-x_k$
0	1.00	2.718282	0.05
1	1.05	3.286299	0.02
2	1.07	3.527609	0.03
3	1.10	3.905416	

Adoptando $p_0''(x_0)=0$ y $p_2''(x_3)=0$ (condición de frontera) entonces $c_0=0$ y $c_3=0$, así que debemos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ .05c_0+2(.07)c_1+.02c_2 = \frac{3}{.02}(3.527609-3.286299)-\frac{3}{.05}(3.286299-2.718282) \\ .02c_1+2(.05)c_2+.03c_3 = \frac{3}{.03}(3.905416-3.527609)-\frac{3}{.02}(3.527609-3.286299) \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es:

$c_0 = 0,\ c_1=13.22529,\ c_2= 13.19694,\ c_3= 0$

$$b_k = \frac{a_{k+1}-a_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1}) \quad (5)$$

$b_0 = 11.13992,\ b_1 = 11.80118,\ b_2 = 12.32963$

$$d_k = \frac{c_{k+1}-c_k}{3h_k} \quad (4)$$

$d_0 = 88.16863,\ d_1 = -.4725490,\ d_2 = -146.6327$

$T(x) \to p_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$

$p_0(x) = 2.718282 + 11.13992(x -1.00) + 0(x -1.00)^2 + 88.16863(x-1.00)^3$

$p_1(x) = 3.286299 + 11.80118(x -1.05) + 13.22529(x-1.05)^2 - .4725490(x-1.05)^3$

$p_2(x) = 3.527609 + 12.32963(x -1.07) + 13.19694(x-1.07)^2 - 146.6327(x-1.07)^3$

$f(1.03) \approx T(1.03) = p_0(1.03) =$

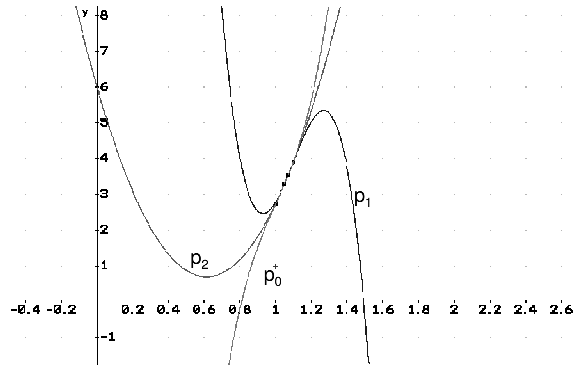
$= 2.718282+11.13992103\,(1.03-1.00)+88.16863(1.03-1.00)^3$

$= 3.054860$

$P_0(x) = 88.16863x^3 - 264.50589x^2 + 275.64581x - 96.590268$

$P_1(x) = -0.472549x^3 + 14.7138193500x^2 - 17.5348848174x + 6.02297676112$

$P_2(x) = -146.6327 \cdot x^3 + 483.887907000 \cdot x^2 - 519.551156290 \cdot x + 185.075444212$



Ajuste de un polinomio por mínimos cuadrados (regresión polinomial)

Encontrar el polinomio que **"mejor se ajuste"** a los datos en el sentido de que la distancia entre los puntos dados y los obtenidos mediante un polinomio sea mínima.

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(p_m(x_k)-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad o \quad \sum_{k=0}^{n}(p_m(x_k)-y_k)^2$$

Este criterio se conoce como **mínimos cuadrados**, y el método para obtener los polinomios que mejor se ajustan según mínimos cuadrados se llama **Regresión polinomial**.

Encontrar $p_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_mx^m$, con $m < n$

tal que $s(a_0, a_1, \cdots a_m) = \sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^{\ 2} + \cdots a_mx_k^{\ m} - y_k\right)^2$

sea mínima

$$s(a_0, a_1, \cdots a_m) = \sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^{\ 2} + \cdots a_mx_k^{\ m} - y_k\right)^2$$

Una condición necesaria para la existencia de un mínimo relativo de la función S es que las derivadas parciales con respecto a a_j, *con* $j=0,1,...,m$, sean cero, $\Rightarrow$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{k=0}^{n} 2(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^{\ 2} + \cdots a_mx_k^{\ m} - y_k) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{k=0}^{n} 2(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^{\ 2} + \cdots a_mx_k^{\ m} - y_k)(x_k) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = \sum_{k=0}^{n} 2(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^{\ 2} + \cdots a_mx_k^{\ m} - y_k)(x_k^2) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = \sum_{k=0}^{n} 2(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^{\ 2} + \cdots a_mx_k^{\ m} - y_k)(x_k^j) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = \sum_{k=0}^{n} 2(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^{\ 2} + \cdots a_mx_k^{\ m} - y_k)(x_k^m) = 0$$

Si anulamos el 2 y

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 = (n+1)a_0$$

Obtenemos un sistema de *m+1* ecuaciones lineales con *m+1* incógnitas $a_0, a_1,\dots,a_m$ denominado **Sistema de ecuaciones normales**.

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)a_1 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^m\right)a_m = \sum_{k=0}^{n} y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)a_1 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{m+1}\right)a_m = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k \\ \vdots \\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^j\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{1+j}\right)a_1 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{m+j}\right)a_m = \sum_{k=0}^{n} x_k^j y_k \\ \vdots \\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^m\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{1+m}\right)a_1 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{2m}\right)a_m = \sum_{k=0}^{n} x_k^m y_k \end{cases}$$

En general

$$\sum_{i=0}^{m} \left(a_i \sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j}\right) = \sum_{k=0}^{n} x_k^j y_k$$

con $j = 0,1,\dots,m$

En el caso particular en que $m = 1$, $p(x) = a_0 + a_1 x_1$ es **la recta de mínimos cuadrados** donde a_0 y a_1 se obtienen resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} x_k^0\right)}_{n+1} a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^1\right)a_1 = \sum_{k=0}^{n} y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^1\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)a_1 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

Medir el **error** es estimar la bondad del ajuste según mínimos cuadrados. Para N=cantidad de puntos (n+1):

i) Error $E = \sum_{k=0}^{n} \left(p_m(x_k) - y_k\right)^2$ o

ii) Error Medio Cuadrático $E_{RMS} = \sqrt{\dfrac{\sum_{k=0}^{n} \left(p_m(x_k) - y_k\right)^2}{N}}$ o

iii) Varianza $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} \left(p_m(x_k) - y_k\right)^2}{N - m - 1}$

Ejemplo

k	x_k	y_k
0	0	–1
1	2	0
2	3	2
3	5	1

a) $p_1(x) = a_0 + a_1 x$

b) $P_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

k	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	y_k	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$
0	0	0	0	0	-1	0	0
1	2	4	8	16	0	0	0
2	3	9	27	81	2	6	18
3	5	25	125	625	1	5	25
$\sum_{k=0}^{3}$	10	38	160	722	2	11	43

a) $p_1(x) = a_0 + a_1 x$

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^0\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^1\right)a_1 = \sum_{k=0}^{3} y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^1\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^2\right)a_1 = \sum_{k=0}^{3} x_k y_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 = 2 \\ 10a_0 + 38a_1 = 11 \end{cases}$$

La solución al sistema es:

a_0 = -17/26 ≈ 0.654

a_1 = 6/13 ≈ 0.461

$$\boxed{p_1(x) = -\frac{17}{26} + \frac{6}{13}x}$$

b) $P_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^0\right)b_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^1\right)b_1 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^2\right)b_2 = \sum_{k=0}^{3} y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^1\right)b_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^2\right)b_1 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^3\right)b_2 = \sum_{k=0}^{3} x_k y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^2\right)b_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^3\right)b_1 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^4\right)b_2 = \sum_{k=0}^{3} x_k^2 y_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b_0 + 10b_1 + 38b_2 = 2 \\ 10b_0 + 38b_1 + 160b_2 = 11 \\ 38b_0 + 160b_1 + 722b_2 = 43 \end{cases}$$

La solución al sistema es:

b_0 = -15/13

b_1 = 101/78

b_2 = -1/6

$$\boxed{p_2(x) = -\frac{15}{13} + \frac{101}{78}x - \frac{1}{6}x^2}$$

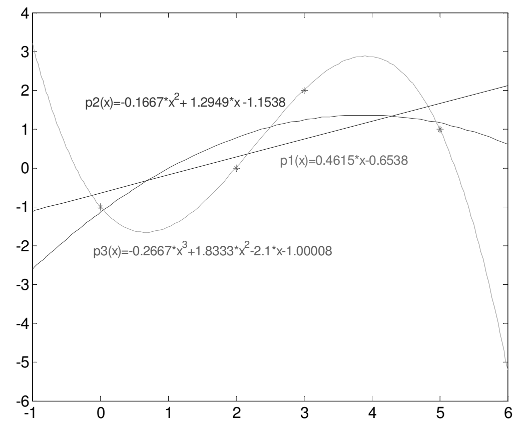
x_k	0	2	3	5
y_k	−1	0	2	1
$p_1(x_k)$	−.654	.269	.731	1.65
$y_k - p_1(x_k)$	−.346	−.269	1.27	−.65
$p_2(x_k)$	−1.15	.769	1.23	1.15
$y_k - p_2(x_k)$	.15	−.769	.77	−.15

a) $E = \sum_{k=0}^{3}(p_1(x_k) - y_k)^2 = (-.346)^2 + (-.269)^2 + (1.27)^2 + (-.65)^2 = 2.23$

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{3}(p_1(x_k) - y_k)^2}{4}} = \sqrt{\frac{2.23}{4}} = .747, \qquad \sigma^2 = \frac{2.23}{2} = 1.115$$

b) $E = \sum_{k=0}^{3}(p_2(x_k) - y_k)^2 = 1.23$ y $E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{3}(p_2(x_k) - y_k)^2}{4}} = .555, \qquad \sigma^2 = 1.23$

Graficamente



Variantes de la regresión lineal

La función potencial

$y=c \cdot x^a$ se puede trasformar en $\log y=a*\log x + \log c$

Usando nuevas variables $x' = \log x$ e $y' = \log y$

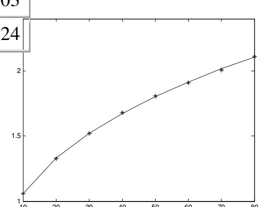
obtenemos la relación lineal $y' = ax'+b$, donde $b=\log c \Rightarrow c=10$^$b$

Ejemplo:

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	1.06	1.33	1.52	1.68	1.81	1.91	2.01	2.11

log x	1.0	1.30	1.477	1.60	1.699	1.778	1.845	1.903
log y	0.025	0.124	0.182	0.225	0.258	0.281	0.303	0.324

```
xx=log10(x)
yy=log10(y)
p=polyfit(xx,yy,1)
hold on
plot(x,10^p(2)*x.^p(1))
```



Variantes de la regresión lineal

La función exponencial

$y=c \cdot e^{ax}$, se puede trasformar en $\ln y=ax+\ln c$

Usando nuevas variables $x' = x$ e $y' = \ln y$

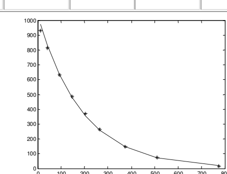
obtenemos la relación lineal $y' = ax'+b$, donde $b=\ln c$

Ejemplo:

x	12	41	93	147	204	264	373	509	773
y	930	815	632	487	370	265	147	76	17

x	12	41	93	147	204	264	373	509	773
ln y	6.835	6.703	6.449	6.188	5.913	5.580	4.990	4.330	2.833

```
yy=log(y)
p=polyfit(x,yy,1)
hold on
plot(x,exp(p(2))*exp(p(1)*x))
```



Instrucciones Matlab

YI = Interp1(X,Y,XI,metodo) Interpola entre puntos **X**,**Y**; **X** vector de valores x, **Y** vector de valores y, **XI** valor a interpolar,
YI resultado de la interpolación en **XI**, **método**:

- 'nearest' - redondeo al valor más cercano
- 'linear' - interpolación lineal
- 'spline' - interpolación segmentaria cubica Spline
- 'cubic' - aproxima a un polinomio cúbico

YI = spline(X,Y,XI) Evalúa XI
P = spline(X,Y) Devuelve los coeficientes de los polinomios en formato "pp"
[X,coef,npol,nterm,dim] = unmkpp(P) Recupera información de los polinomios
YI = ppval(P,XI) Evalúa polinomios "pp" en un punto

[coef,P] = polyfit(X,Y,N) Ajusta X,Y con un polinomio de grado N, (por mínimos cuadrados), **coef** son los coeficientes del polinomio y P es el polinomio "pp" para ser evaluado con ppval