

### Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Una **Ecuación Diferencial** es aquella ecuación que contiene diferenciales o derivadas de una o más funciones.

Una **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)**. Es aquella ecuación diferencial que contiene derivadas de una o más funciones con respecto a una sola variable independiente.

Permiten modelar procesos dinámicos como: vaciado de recipientes, reactores químicos, movimientos amortiguados, desarrollos poblacionales; y situaciones estáticas como: deflexión de vigas y problemas geométricos.

A veces no hay una solución analítica, por lo que se necesitan aproximaciones numéricas.

### Solución numérica de problemas de valor inicial (PVI)

Dada una ecuación diferencial  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$

mediante técnicas de cálculo de primitivas se puede obtener la función  $y(t) = y+C$ .

Los métodos numéricos permitirán obtener valores aproximados  $Y_t$  de la solución  $\phi(t)$  en puntos  $t$  igualmente espaciados.

$$Y_t \approx y(t) = \phi(t)$$

La curva elegida de la familia  $y+C$  se establece a partir del valor de la función  $y$  en el *valor inicial* de la variable independiente ( $y(t_0)$ ).



### Método de Euler o de la recta tangente

Se conocen:  $t_0, Y_0 = \phi(t_0)$  y  $Y'_0 = \phi'(t_0) = f(t_0, \phi(t_0)) = f(t_0, Y_0)$

Se obtiene un valor aproximado  $Y_1$  de  $\phi(t_1)$  moviéndose a lo largo de una recta tangente desde  $t_0$  hacia  $t_1$

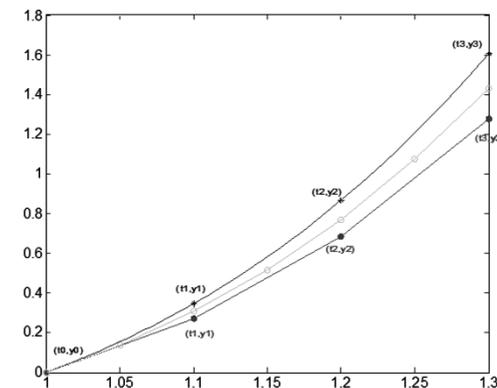
$$\phi'(t_0) = \frac{Y_1 - Y_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow Y_1 = Y_0 + (t_1 - t_0) \phi'(t_0) = Y_0 + (t_1 - t_0) f(t_0, Y_0)$$

$$Y_1' = \frac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow Y_2 = Y_1 + (t_2 - t_1) Y_1' = Y_1 + (t_2 - t_1) f(t_1, Y_1)$$

En general  
si  $h = t_{k-1} - t_k$

$$Y_{k+1} = Y_k + hf(t_k, Y_k)$$

### Gráficamente



### Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y + t^2e^t = f(t, y), & h=.1 \Rightarrow t_0=1, t_1=1.1, t_2=1.2, \dots \\ 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0, \quad h = 0.1 \end{cases}$$

La solución exacta es:  
 $y(t) = t^2(e^t - e)$   
 $\phi(1.2) = 1.2^2(e^{1.2} - e) = .8666425$

$$Y_0 = \phi(t_0) = \phi(1) = y(1) = 0$$

$$Y_1 = Y_0 + hf(t_0, Y_0) = 0 + 0.1 * f(1, 0) = 0.1 * 2.718282 = 0.2718282 \approx \phi(1.10)$$

$$Y_2 = Y_1 + hf(t_1, Y_1) = 0.2718282 + 0.1 * f(1.1, 0.2718282) = 0.6847556 \approx \phi(1.20)$$

$$E_{n=0,1} = \phi(1.20) - Y_2 = 0.8666425 - 0.6847556 = 0.1818869$$

Si  $h = 0.05$   
 $t_0 = 1, t_1 = 1.05, t_2 = 1.1, t_3 = 1.15, t_4 = 1.2$

$$Y_0 = 0$$

$$Y_1 = Y_0 + hf(t_0, Y_0) = 0 + .05 * f(1,0) = .1359141 \approx \phi(1.05)$$

$$Y_2 = Y_1 + hf(t_1, Y_1) = .1359141 + .05 * f(1.05, .1359141) = .3063863 \approx \phi(1.10)$$

$$Y_3 = Y_2 + hf(t_2, Y_2) = .3063863 + .05 * f(1.10, .3063863) = .5159917 \approx \phi(1.15)$$

$$Y_4 = Y_3 + hf(t_3, Y_3) = .5159917 + .05 * f(1.15, .5159917) = .7696960 \approx \phi(1.20)$$

$$E_{h=0.05} = \phi(1.20) - Y_4 = .8666425 - .7696960 = .0969466$$

### Error en la fórmula de Euler

Otra forma de deducir la fórmula del método de Euler para encontrar una aproximación de la solución  $y(t)$  del P.V.I. con solución única es usando el desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto  $t_k$ ,  $\Rightarrow$

$$\underbrace{\phi(t_{k+1})}_{\text{Form. Euler}} = \underbrace{\phi(t_k)}_{f(t_k, \phi(t_k))} + \underbrace{h \phi'(t_k)}_{\text{Error local}} + \frac{h^2}{2!} \phi''(t_k) + \dots + \frac{h^n}{n!} \phi^{(n)}(t_k) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \phi^{(n+1)}(\xi_k)$$

Form. Euler

Error local  
 $e_{k+1} = O(h^2)$

Error acumulado

$$E_T = \sum_{k=0}^{m-1} e_{k+1} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \phi''(\xi_k) = \frac{h^2}{2} m \phi''(\xi_k) = \frac{h}{2} \left( \frac{T-t_0}{m} \right) m \phi''(\xi_k) = h \left( \frac{T-t_0}{2} \phi''(\xi_k) \right) = Ch = O(h)$$

Si  $h$  se reduce a la mitad el error se reducirá a la mitad

### Método de Euler mejorado o método Heun

**Método Euler**  $Y_{k+1} = Y_k + hf(t_k, Y_k)$

Aproximando por la media aritmética de sus valores en los extremos del intervalo

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, Y_k) + f(t_{k+1}, Y_{k+1})]$$

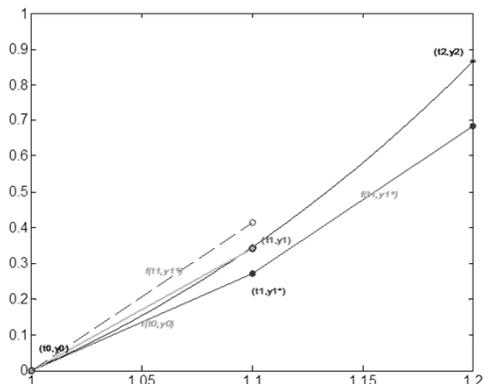
No se conoce

Como la incógnita  $Y_{k+1}$  aparece como uno de los argumentos en el segundo miembro de la ecuación (en este caso el **método** se dice **implícito**), se reemplaza  $Y_{k+1}$  por el valor que se obtuvo usando la fórmula de Euler sencilla (el **método** se convierte en **explícito**), obteniendo:

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, Y_k) + f(t_{k+1}, Y_k + hf(t_k, Y_k))]$$

Por Euler

### Graficamente



### Error en el método Heun

Otra forma de deducir la fórmula de Heun

Para obtener y(t) podemos integrar y'(t) en [t<sub>0</sub>, t<sub>1</sub>]

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} y'(t) dt = y(t_1) - y(t_0) \Rightarrow y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt$$

Aplicando trapecios para calcular la integral, con h=t<sub>1</sub>-t<sub>0</sub>

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{2} (f(t_0, y(t_0)) + f(t_1, y(t_1))) \Rightarrow \text{error} = y''(\xi) \frac{h^3}{12} = O(h^3)$$

$$\text{en } M \text{ pasos } E_T = \sum_{k=1}^M y''(\xi_k) \frac{h^3}{12} \approx \frac{b-a}{12} y''(\xi) h^2 = O(h^2)$$

**Precisión:** En el extremo final del intervalo  $E(y(b), h) \approx Ch^2$   
 Si se toma la mitad del paso  $E(y(b), h/2) \approx C h^2/4 \therefore$  Si se reduce h a la mitad se espera que el error se reduzca a la cuarta parte

### Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t} y + t^2 e^t, & 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0, & h = 0.1 \end{cases}$$

$$Y_0 = \phi(t_0) = \phi(1) = 0$$

$$\begin{cases} Y_1^* = Y_0 + hf(t_0, Y_0) = 0 + .1 * f(1,0) = .1 * 2.718282 = .2718282 \\ Y_1 = Y_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, Y_0) + f(t_1, Y_1^*)] = 0 + \frac{.1}{2} [f(1,0) + f(1.1, .2718282)] = .3423778 \approx \phi(1.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_2^* = Y_1 + hf(t_1, Y_1) = .3423778 + .1 * f(1.1, .3423778) = .7681324 \\ Y_2 = Y_1 + \frac{h}{2} [f(t_1, Y_1) + f(t_2, Y_2^*)] = .3423778 + \frac{.1}{2} [f(1.1, .3423778) + f(1.2, .7681324)] = .8583146 \approx \phi(1.20) \end{cases}$$

$$E_{h=0.1} = \phi(1.20) - Y_2 = .8666425 - .8583146 = .0083279$$

Con Euler

$$E_{h=0.1} = \phi(1.20) - Y_2 = .8666425 - .6847556 = .1818869$$

### Método de la Serie de Taylor

Si  $y=\phi(t)$  es la solución exacta del P.V.I. con solución única y  $\phi(t)$  tiene al menos las tres primeras derivadas continuas en el intervalo de interés  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \phi(t_k + h) &= \phi(t_k) + h \phi'(t_k) + \frac{h^2}{2!} \phi''(t_k) + \frac{h^3}{3!} \phi'''(\xi_k) \\ \phi''(\xi_k) &= f_t(t_k, \phi(t_k)) + f_y(t_k, \phi(t_k)) \phi'(t_k) \end{aligned}$$

Reemplazando  $\phi(t_k)$ ,  $\phi'(t_k)$ ,  $\phi''(t_k)$  por sus valores aproximados

$Y_k$ ,  $Y'_k = f(t_k, Y_k)$  y  $Y''_k = f_t(t_k, Y_k) + f_y(t_k, Y_k) f(t_k, Y_k)$  respectivamente

$$Y_{k+1} = Y_k + hY'_k + \frac{h^2}{2} Y''_k \quad \text{con error} \quad \frac{1}{6} h^3 \phi'''(\xi_k)$$

### Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y + t^2e^t, & 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0, & h = 0.1 \end{cases}$$

$$Y_0 = y(t_0) = y(1) = 0$$

$$Y_{k+1} = Y_k + hY'_k + \frac{h^2}{2} Y''_k \Rightarrow Y_1 = Y_0 + hY'_0 + \frac{h^2}{2} Y''_0$$

$$Y'_k = f(t_k, Y_k) = \frac{2}{t_k} Y_k + t_k^2 e^{t_k}$$

$$Y'_0 = f(t_0, Y_0) = \frac{2}{t_0} Y_0 + t_0^2 e^{t_0} = 2.71828$$

$$Y''_k = f_t(t_k, Y_k) + f_y(t_k, Y_k)f(t_k, Y_k) = \frac{2}{t_k^2} Y_k + t_k^2 e^{t_k} + 2t_k e^{t_k} + \frac{2}{t_k} Y'_k$$

$$Y''_0 = \frac{2}{t_0^2} Y_0 + t_0^2 e^{t_0} + 2t_0 e^{t_0} + \frac{2}{t_0} Y'_0 = 2.71828 + 4.71828 + 2 * 2.71828 = 13.5913$$

$$Y_1 = Y_0 + hY'_0 + \frac{h^2}{2} Y''_0 = 0 + .1 * 2.71828 + \frac{.1^2}{2} 13.5913 = 0.3397$$

### Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta se fundamenta en el método de la serie de Taylor, buscando la exactitud de este método pero sin tener que calcular derivadas parciales y de orden superior de la función  $y(t)$ .

Existen métodos de Runge-Kutta de diferentes ordenes, el orden lo define el orden de la derivada en el término de la serie de Taylor donde ésta se corte.

### R-K de segundo orden

La fórmula de los tres primeros términos de la serie de Taylor es

$$Y_{k+1} = Y_k + hY'_k + \frac{h^2}{2} Y''_k$$

$$= Y_k + hf(t_k, Y_k) + \frac{h^2}{2} [f_t(t_k, Y_k) + f_y(t_k, Y_k)f(t_k, Y_k)] =$$

$$= Y_k + h \left\{ f(t_k, Y_k) + \frac{h}{2} [f_t(t_k, Y_k) + f_y(t_k, Y_k)f(t_k, Y_k)] \right\} =$$

$$= Y_k + \frac{h}{2} f(t_k, Y_k) + \frac{h}{2} [f(t_k, Y_k) + f_t(t_k, Y_k)h + f_y(t_k, Y_k)f(t_k, Y_k)h] =$$

Por Taylor  $f(t_k + h, Y_k + k) \approx f(t_k, Y_k) + f_t(t_k, Y_k)h + f_y(t_k, Y_k)k$

si  $k = f(t_k, Y_k)h$

$$= Y_k + \frac{h}{2} f(t_k, Y_k) + \frac{h}{2} [f(t_k + h, Y_k + f(t_k, Y_k)h)]$$

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{2} \overset{K1}{(hf(t_k, Y_k))} + \frac{1}{2} \overset{K2}{(h[f(t_k + h, Y_k + f(t_k, Y_k)h])})}$$

La siguiente fórmula se conoce como la **Fórmula general de Runge-Kutta de segundo orden**.

$$Y_{k+1} = Y_k + aK_1 + bK_2 \quad \text{con} \quad \begin{cases} K_1 = hf(t_k, Y_k) \\ K_2 = hf(t_k + \alpha h, Y_k + \beta K_1) \end{cases}$$

Se deben encontrar los valores  $a$ ,  $b$ , y  $\alpha$ ,  $\beta$  tales que la fórmula tenga la exactitud del método de los tres primeros términos de la serie de Taylor sin tener que calcular derivadas de orden superior de la función  $\phi(t)$ .

Para  $a=b=1/2$  y  $\alpha=\beta=1$  es la fórmula de Heun o Euler mejorado

### R-K de cuarto orden

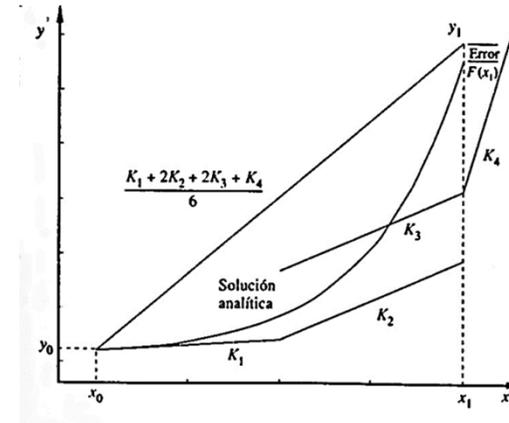
La fórmula de Runge-Kutta que más se utiliza es equivalente a la fórmula de los cinco primeros términos de la serie de Taylor, o sea un método de Runge-Kutta de orden cuatro.

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \text{ con } \begin{cases} K_1 = hf(t_k, Y_k) \\ K_2 = hf(t_k + \frac{1}{2}h, Y_k + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 = hf(t_k + \frac{1}{2}h, Y_k + \frac{1}{2}K_2) \\ K_4 = hf(t_k + h, Y_k + K_3) \end{cases}$$

$$Y_0 = y(t_0) = y_0$$

Con **error local** de orden  $O(h^5)$  y **error total** de orden  $O(h^4)$ , siempre y cuando la solución tenga las primeras cinco derivadas continuas.

### Graficamente



### Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y + t^2e^t, & 1 \leq t \leq 2 & Y_0 = 0 \\ y(1) = 0, & h = 0.1 & Y_1 = Y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(t_0, Y_0) = .1f(1,0) = .27182818 \\ K_2 &= hf(t_0 + \frac{1}{2}h, Y_0 + \frac{1}{2}K_1) = .1f(1.05, \frac{.27182818}{2}) = .3409444 \\ K_3 &= hf(t_0 + \frac{1}{2}h, Y_0 + \frac{1}{2}K_2) = .1f(1.05, \frac{.3409444}{2}) = .3475269 \\ K_4 &= hf(t_0 + h, Y_0 + K_3) = .1f(1.1, .3475269) = .4266908 \\ Y_1 &= 0 + \frac{1}{6}(.27182818 + (2)(.3409444) + (2)(.3475269) + .4266908) = .3459103 \\ Y_2 &= .8666217 \\ \text{Error} &= |Y_2 - y(1.2)| = |.8666217 - .8666425| = 2.08 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

### Cálculo de tamaño del intervalo Ej: para el método RK4

En el extremo final del intervalo  $E(y(b),h) \approx Ch^4$   
 Si se toma la mitad del paso  $E(y(b),h/2) \approx C h^4/16$   
 Si se reduce  $h$  a la mitad se espera que el error se reduzca en 1/16.

Se podría estimar un  $h$  adecuado para mantener un error menor que un  $\epsilon$  dado. El valor  $C$  será dependiente del problema.

Considerando el error local  $E_k = Ch^5$ , y que con la mitad de  $h$  se necesitan evaluar 2 puntos para evaluar  $k$

$$2E_{k/2} = 2C \frac{h^5}{32} \Rightarrow E_k - 2E_{k/2} = Ch^5 - 2C \frac{h^5}{32} = \frac{15}{16} Ch^5 \Rightarrow C = \frac{16(E_k - 2E_{k/2})}{15h^5}$$

$$\begin{cases} [y_1]_k \approx \phi(1) + E_k \\ [y_1]_{k/2} \approx \phi(1) + 2E_{k/2} \end{cases} E_k - 2E_{k/2} \approx [y_1]_{k/2} - [y_1]_k \Rightarrow C = \frac{16}{15} \frac{[y_1]_{k/2} - [y_1]_k}{h^5}$$

Considerando  $\epsilon = E_k = Ch^5 \Rightarrow h = \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{1/5}$

### Método R-K-Feldberg

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = hf(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

$$k_6 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

$$z_{n+1} = y_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12.825}k_2 + \frac{28.561}{56.430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

$$E = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

$$s = \left( \frac{\varepsilon h}{2|z_{n+1} - y_{n+1}|} \right)^{1/4}$$

$\varepsilon$  = tolerancia  
sh = paso óptimo

### Sistemas de EDOs de primer orden

Movimiento vertical de los resortes acoplados

Corrientes en una red eléctrica

Modelo predador-presa

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -Cy + Dxy$$

Péndulo doble

### Sistemas de EDOs de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = x' = f_1(t, x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y' = f_2(t, x, y)$$

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$$

Se aplica algún método (preferiblemente Runge-Kutta de orden cuatro) a cada una de las ecuaciones del sistema.

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6}(K_{1y} + 2K_{2y} + 2K_{3y} + K_{4y}) \text{ con } \begin{cases} K_{1y} = hf_2(t_k, X_k, Y_k) \\ K_{2y} = hf_2(t_k + \frac{1}{2}h, X_k + \frac{1}{2}K_{1x}, Y_k + \frac{1}{2}K_{1y}) \\ K_{3y} = hf_2(t_k + \frac{1}{2}h, X_k + \frac{1}{2}K_{2x}, Y_k + \frac{1}{2}K_{2y}) \\ K_{4y} = hf_2(t_k + h, X_k + K_{3x}, Y_k + K_{3y}) \end{cases}$$

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6} \dots$$

**Ejemplo:**

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y = f(t, x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y = g(t, x, y)$$

$$\begin{cases} x(0) = 6 \\ y(0) = 4 \end{cases} \quad h=0.02$$

$$f(t, x, y) = x + 2y$$

$$K_{1f} = h f(t_0, x_0, y_0) = 0.02 f(0, 6, 4) = .28$$

$$K_{2f} = h f(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{1f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{1g}) = 0.02 f(0.01, 6.14, 4.26) = .2932$$

$$K_{3f} = h f(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{2f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{2g}) = 0.02 f(0.01, 6.1466, 4.2694) = .2937$$

$$K_{4f} = h f(t_0 + h, x_0 + K_{3f}, y_0 + K_{3g}) = 0.02 f(0.02, 6.2937, 4.5396) = .3074$$

$$g(t, x, y) = 3x + 2y$$

$$h=0.02$$

$$K_{1g} = h g(t_0, x_0, y_0) = 0.02 g(0, 6, 4) = .52$$

$$K_{2g} = h g(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{1f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{1g}) = 0.02 g(0.01, 6.14, 4.26) = .5388$$

$$K_{3g} = h g(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{2f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{2g}) = 0.02 g(0.01, 6.1466, 4.2694) = .5395$$

$$K_{4g} = h g(t_0 + h, x_0 + K_{3f}, y_0 + K_{3g}) = 0.02 g(0.02 + 6.2937 + 4.5395)$$

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{6}(K_{1f} + 2K_{2f} + 2K_{3f} + K_{4f}) = 6 + \frac{1}{6}(.28 + 2(.2932) + 2(.2937) + .3074) = 6.2935$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_{1g} + 2K_{2g} + 2K_{3g} + K_{4g}) = 4 + \frac{1}{6}(.52 + 2(.5388) + 2(.5395) + .5592) = 4.5393$$

### EDOs de orden N

Si la ecuación es de orden  $\geq 2$ , se transforma la ecuación en un sistema de EDOs de primer orden. Ejemplo:

$$\begin{cases} t^2 y'' - 2ty' + 2y + t^3 \ln(t) \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad 1 \leq t \leq 1.5 \end{cases}$$

Se transforma el P.V.I. en un sistema de EDOs de primer orden.

• Se despeja el diferencial de mayor orden  $\Rightarrow y'' = \frac{2}{t} y' - \frac{2}{t^2} y + t \ln(t)$

• Se reemplazan las funciones por otras equivalentes, de manera de eliminar las diferenciales de orden superior

$$\begin{cases} y' = g = f_1(t, y, g) \\ g' = y' = \frac{2}{t} g - \frac{2}{t^2} y + t \ln(t) = f_2(t, y, g) \\ y(1) = 1, \quad g(1) = 0, \quad h = 0.05 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = g = f_1(t, y, g) \\ g' = \frac{2}{t} g - \frac{2}{t^2} y + t \ln(t) = f_2(t, y, g) \\ y(1) = 1, \quad g(1) = 0, \quad h = 0.05 \end{cases}$$

$$K_{1f_1} = hf_1(t_0, y_0, g_0) = .05 f_1(1,1,0) = .05 (0) = 0$$

$$K_{1f_2} = hf_2(t_0, y_0, g_0) = .05 f_2(1,1,0) = .05 \left( \frac{2}{1} 0 - \frac{2}{1^2} 1 + \ln(1) \right) = -.1$$

$$K_{2f_1} = hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{1f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{1f_2}}{2}\right) = .05 f_1(1.025, 1, -.05) = -2.5 * 10^{-3}$$

$$K_{2f_2} = hf_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{1f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{1f_2}}{2}\right) = .05 f_2(1.025, 1, -.05) = -.098793992$$

$$K_{3f_1} = hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{2f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{2f_2}}{2}\right) = .05 f_1(1.025, .99875, -.049396996) = -2.4698498 * 10^{-3}$$

$$K_{3f_2} = hf_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{2f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{2f_2}}{2}\right) = .05 f_2(1.025, .99875, -.049396996) = -.0986161855$$

$$\begin{aligned} K_{4f_1} &= hf_1(t_0, y_0 + K_{3f_1}, g_0 + K_{3f_2}) \\ &= .05 f_1(1.05, .9975301502, -.0986161855) = -4.930809278 * 10^{-3} \\ K_{4f_2} &= hf_2(t_0, y_0 + K_{3f_1}, g_0 + K_{3f_2}) = .05 f_2(1.05, .9975301502, -.0986161855) \\ &= -.0973094592 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{6} (K_{1f_1} + 2K_{2f_1} + 2K_{3f_1} + K_{4f_1}) = \\ &= 1.0 + \frac{1}{6} (0 + 2(-2.5 * 10^{-3}) + 2(-2.4698498 * 10^{-3}) - 4.930809278 * 10^{-3}) \\ &= .9975215819 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 &= y_0 + \frac{1}{6} (K_{1f_2} + 2K_{2f_2} + 2K_{3f_2} + K_{4f_2}) = \\ &= 0 + \frac{1}{6} (-.1 + 2(-.0987793992) + 2(-.098616185) - .0973094592) \\ &= -.0986883023 \end{aligned}$$

### Comandos Matlab

[ T, Y, S ] = comando ('F', tspan, y0, opciones, p1, p2, ... )

comando:

- **Ode45:** Compara resultados de Runge-Kutta de orden 4 y 5. Dormand-Prince
- **Ode23:** Compara resultados de Runge-Kutta de orden 2 y 3. Bogacki and Shampine.
- **Ode113:** Multipaso, Adams-Bashforth-Moulton
- Los comandos **Odexxs**, **Odexxt** y **Odexxtb** : Comparan resultados de Runge-Kutta con distintos niveles de tolerancia.

### Comandos Matlab (cont.)

**Parámetros de entrada:**

'F': función conteniendo  $dy/dt$ , o vector columna de funciones  $dy/dt$

**tspan**: vector conteniendo el intervalo de integración  $[t0, tfinal]$  ó puntos a evaluar  $[t0, t1, t2, \dots, tfinal]$  ó  $[t0:h:tfinal]$ .

**y0**: vector de condiciones iniciales.

**opciones**: creadas con **odeset**.

**p0, p1, p2, ...** : opciones pasadas a la función/es.

**Parámetros de salida:**

**T**: vector de puntos t.

**Y**: matriz solución, cada fila corresponde a cada valor t, cada columna a  $y_i$ .

**S**: estadísticas de los cálculos